ORSAY

N° d'ordre : 2741

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

COLETTE GUILLOPÉ

1er sujet : QUELQUES RÉSULTATS SUR LE COMPORTEMENT À T FINI ET POUR T TENDANT VERS + ∞ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES.

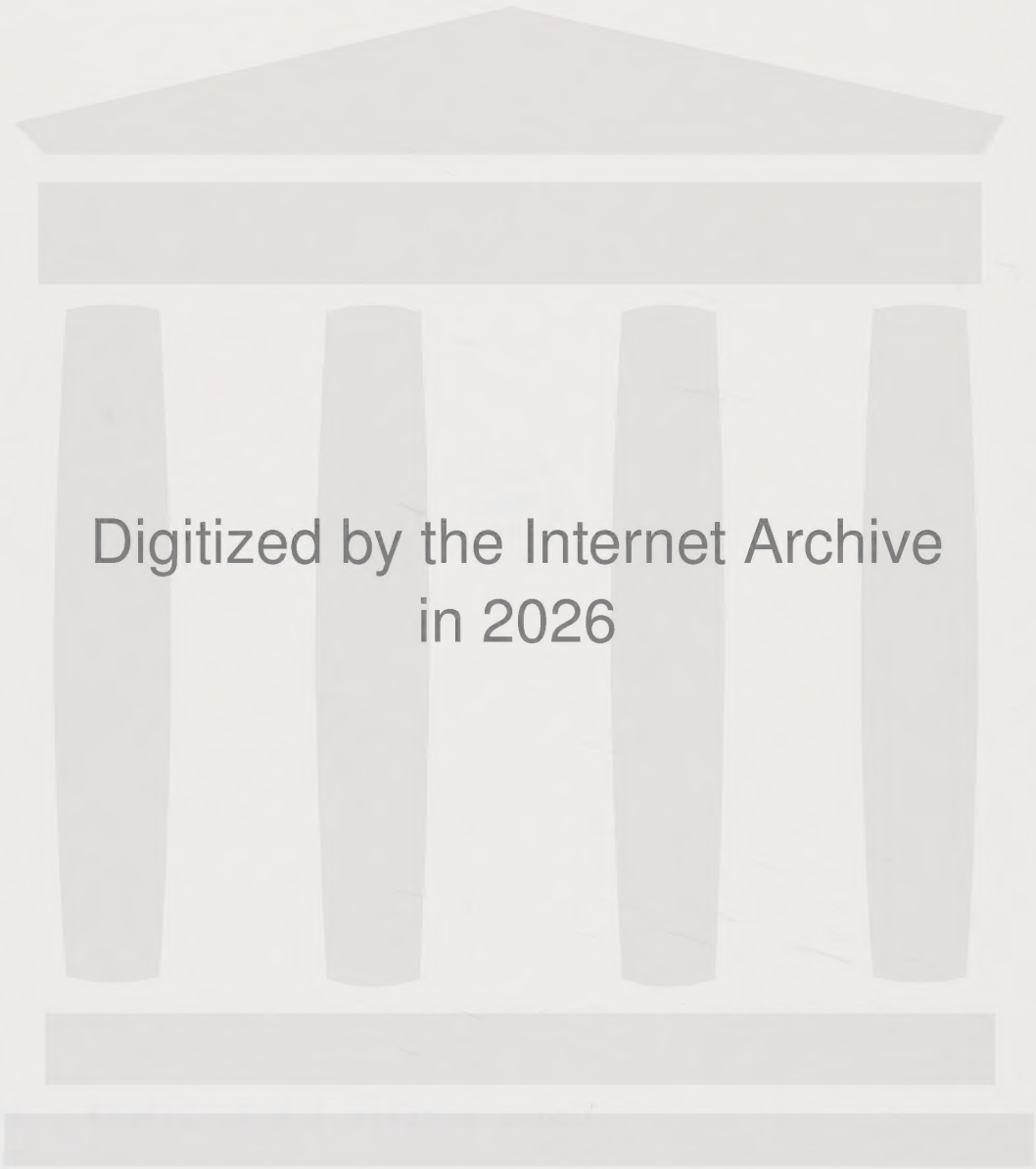
2e sujet : GRANDS GRAPHES DE DIAMÈTRE ET DEGRÉ MAXIMUM DONNÉS.

Soutenue le 16 JUIN 1983 *devant le Jury composé de* :

MM. R. TEMAM, *Président*
C. BARDOS
J.C. BERMOND
A. LICHNEWSKY
F. MIGNOT
J.C. SAUT
C. FOIAS, *Membre invité.*

UNIV.
LEIDEN
1878

Codes matière A.M.S. (1980) : 35Q10
76D05


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543524_0009

ORSAY

N° d'ordre : 2741

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

COLETTE GUILLOPÉ

1er sujet : QUELQUES RÉSULTATS SUR LE COMPORTEMENT À T FINI ET POUR T TENDANT VERS + ∞ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES.

2e sujet : GRANDS GRAPHES DE DIAMÈTRE ET DEGRÉ MAXIMUM DONNÉS.

Soutenue le 16 JUIN 1983 *devant le Jury composé de* :

MM. R. TEMAM, *Président*
C. BARDOS
J.C. BERMOND
A. LICHNEWSKY
F. MIGNOT
J.C. SAUT
C. FOIAS, *Membre invité.*

Je tiens à remercier, tout particulièrement,

R. TEMAM, qui m'a accueillie dans son équipe, n'a cessé de me prodiguer conseils et encouragements amicaux et avec lequel j'ai eu le plaisir de travailler, de me faire l'honneur de présider le Jury ;

C. BARDOS, A. LICHNEWSKY, F. MIGNOT, J.C. SAUT, avec lesquels j'ai eu de nombreuses conversations, d'avoir accepté de participer au Jury ;

J.C. BERMOND, qui m'a proposé un sujet de seconde thèse dans un domaine en plein développement, de n'avoir pas ménagé son temps pour m'aider à sa préparation ;

C. FOIAS, avec lequel le travail en commun a été si agréable et enrichissant ;

mes camarades du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, de leur amical soutien ;

D. LE MEUR et C. DECALF, ainsi que Mesdames ZIELINSKY et LAUNAY, qui ont réalisé avec soin, goût et rapidité l'édition de ce document.

SUBJECT :

Some results on the finite-time and long-time behaviors of the solutions to Navier-Stokes equations.

ABSTRACT :

In this Thesis, some properties of the solutions to non stationary Navier-Stokes equations in a domain Ω of R^N, $N = 2$ or 3, are presented. The homogeneous case in a bounded regular domain in R^N and the space-periodic case in R^N are considered. Two kinds of problems are treated :

. Properties of the solutions as $t \to +\infty$. It is shown particularly that, if the data are C^∞ and independent of time, any functional invariant set bounded in $H^1_{loc}(\Omega)^N$ is made of C^∞ functions .

In the case where the driving forces are zero, we give some precise informations on the long-time behavior of the solution in every space $H^m_{loc}(\Omega)^N$.

. Properties of the solutions on a finite time interval (t_0,t_1) . Particularly, as an application of the results we obtain, the lagrangian representation of the flow related to a weak solution of the Navier-Stokes equation can be defined.

KEY WORDS : Navier-Stokes, weak solutions, long-time behavior.

INTRODUCTION

L'objet de cette thèse est de présenter quelques propriétés des solutions des équations de Navier-Stokes non stationnaires. Deux types de questions sont abordés ici :

. Propriétés des solutions lorsque t tend vers $+\infty$: c'est l'objet des articles [B] et [C] ;

. Comportement des solutions sur un intervalle de temps fini (t_0,t_1) : c'est l'objet des articles [A], réalisé en collaboration avec C. Foias et R. Temam, et [D], réalisé en collaboration avec C. Foias .

Les équations de Navier-Stokes sont utilisées pour représenter le mouvement de certains fluides visqueux incompressibles (fluides dits newtoniens) dans un domaine $\mathcal{O}$ de l'espace $\mathbf{R}^N$, N = 2 ou 3. Le fluide est supposé homogène, de densité 1. Alors la vitesse $u = u(x,t)$ et la pression $p = p(x,t)$ d'une particule de fluide qui est au point x à l'instant t sont liées par l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui peut être écrite sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u.\nabla)u + \nabla p = f \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O}\times(0,+\infty) ;$$

$\nu>0$ est le coefficient de viscosité cinématique, f désigne les forces volumiques appliquées au fluide, supposées connues. La condition d'incompressibilité s'exprime par

$$(2) \qquad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O}\times(0,+\infty) .$$

Pour que le problème (1)-(2) constitue un problème bien posé, nous imposons une condition initiale,

$$(3) \qquad u(.,0) = u_0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O} \ (u_0 \text{ donné}) ,$$

et une condition au bord qui sera :

- soit

$(4)_a$ $\quad u = 0$ p.p. sur $\partial\mathcal{O}\times(0,+\infty)$,

si $\mathcal{O} = \Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière Γ assez régulière ; en fait Γ sera supposé de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour simplifier ;

- soit

$(4)_b$ $\quad u(x + Le_i,t) = u(x,t)$, $i = 1,\ldots,N$, p.p. $(x,t) \in (0,+\infty)$

si $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$; (e_i), $i = 1,\ldots,N$, désigne la base canonique de $\mathbb{R}^N$; les inconnues seront ici les restrictions des fonctions u et p au cube $Q =]0,L[^N$.

Bien que n'ayant pas de signification physique, la condition $(4)_b$ est intéressante car elle permet l'utilisation des séries de Fourier ; le cadre fonctionnel où s'exprime le problème correspondant est donc plus simple, et la présentation des résultats et leurs démonstrations sont plus directes. De plus, les propriétés des solutions des équations de Navier-Stokes (1)-(3) satisfaisant l'une ou l'autre des conditions au bord (4) sont souvent similaires, sauf évidemment celles qui concernent le comportement de ces solutions au voisinage du bord du domaine (phénomène de couche limite).

Dans l'article [A], en collaboration avec C. Foias et R. Temam, sont établies quelques propriétés de régularité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes périodiques en espace. Nous faisons des hypothèses de régularité sur les données : $u_0 \in X_m$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, X_{m-1})$, $m \geq 1$. Ici, X_m désigne un espace de fonctions à divergence nulle, qui sont les restrictions à Q de fonctions Q-périodiques appartenant à l'espace de Sobolev $(H^m_{loc})^3$.

Nous montrons que, pour toute solution u, la norme de u(t) dans X_m reste bornée sur un intervalle de temps (t_1,t_2) tant que la norme de u(t) dans X_1 l'est. Nous en déduisons que toute solution faible u = u(t) des équations de Navier-Stokes périodiques en espace est continue,à valeurs dans $(H^m(Q))^3$, sauf sur un ensemble de mesure nulle de (0,T), pour tout T>0 .

Puis nous montrons que toute solution faible satisfait des estimations a priori du type

$$(5) \qquad u \in L^{\alpha_m}(0,T;X_m), \quad \int_0^T |u(t)|_m^{\alpha_m} dt \leqslant C_m(1+T) ,$$

$\forall$ T>0, $\forall$ m $\in \mathbb{N}_*$, où la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres réels positifs décroissant vers 0 quand m croît vers $+\infty$. Nous remarquons que l'estimation (5) est vraie aussi dans le cas d'un ouvert borné Ω , si m = 1,2 où $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2/3$. De cette propriété, on peut déduire que toute solution faible de (1.3)-$(4)_a$ ou $(4)_b$ appartient à l'espace $L^1(0,T;(L^\infty)^3)$, ce qui permet de définir la représentation lagrangienne du flot associé à une solution faible (cf. [1] et R. Temam [6]).

Enfin, supposant la donnée f analytique, nous prouvons un résultat d'analyticité en temps des solutions.

Les articles [B] et [C] concernent le comportement, lorsque $t \to +\infty$, des solutions fortes des équations de Navier-Stokes sur un domaine Ω borné.

En dimension d'espace 2, C. Foias et G. Prodi [2] ont montré que, si la donnée f est dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_+;(L^2(\Omega))^2)$, alors la solution u des équations (1)-(4), qui est unique et continue,est bornée de $[t_o,+\infty[$, $\forall$ t_o>0, à valeurs dans $(H^1(\Omega))^2$. Par contre, en dimension d'espace 3, nous ne savons pas en général quelle est la régularité globale des solutions faibles : la difficulté est due à l'impossibilité, pour l'instant, de contrôler par une estimation a priori le réel $(\sup_{t\geqslant t_o} \|u(t)\|)$ (norme du gradient de u dans $L^2(\Omega)^3$). En particulier, C. Foias et R. Temam [4] ont récemment montré que s'il existe une solution u telle que $\sup_{t\geqslant t_o} \|u(t)\| = +\infty$, alors il existe une solution $\tilde{u}$ dont la norme du gradient explose en un temps fini. Mais, si les données u_o, f ou $1/\nu$ sont choisies assez petites, alors il existe un instant t_o tel que le réel $(\sup_{t\geqslant t_o} \|u(t)\|)$ soit fini.

Dans l'article [B], nous ferons l'hypothèse $(\sup_{t\geqslant t_o} \|u(t)\|) < +\infty$.

En faisant des hypothèses de régularité et de bornitude convenables sur f et u_0, nous montrons que toute solution vérifiant $(\operatorname{Sup}_{t \geqslant t_0} \|u(t)\|) < +\infty$ est bornée dans chaque espace $H^m(\Omega)^N$. Puis nous déduisons de cette propriété que, si la fonction f (supposée indépendante du temps) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$, alors tout ensemble fonctionnel invariant - et en particulier, tout ensemble fonctionnel attracteur - , relatif aux équations de Navier-Stokes (1)-(4), borné dans $H^1(\Omega)^N$, est constitué de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$. Cette propriété est similaire à la propriété de régularité des solutions des équations de Navier-Stokes stationnaires, mais concerne aussi les solutions périodiques en temps, ou quasi-périodiques,...

Dans le cas $f \equiv 0$ (c'est aussi le cas d'une force dérivant d'un potentiel), il est connu depuis les travaux de J. Leray [5] que la solution des équations (1)-(4) décroît, lorsque $t \to +\infty$, vers 0 dans l'espace $H^1(\Omega)^N$ de façon au moins exponentielle : nous montrons dans [B] que cette propriété reste vraie dans chaque espace $H^m(\Omega)^N$, $m \in \mathbb{N}$.

Ce résultat a été précisé dans l'article [C] à la suite du récent travail de C. Foias et J.C. Saut [3] : ces derniers montrent que toute solution non nulle décroît, lorsque $t \to +\infty$, dans l'espace $H^1(\Omega)^N$ exactement comme la fonction $t \to C \exp(-\nu\Lambda t)$, où Λ est une valeur propre de l'opérateur de Stokes déterminée par la donnée initiale u_0. Il en résulte que la solution u se comporte, pour t grand, comme sa projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre Λ. Dans [C], nous montrons que des résultats similaires ont lieu dans les espaces $H^m(\Omega)^N$, et en particulier dans le domaine D(A) de l'opérateur de Stokes.

Dans [B] et [C], les difficultés inhérentes au calcul des normes dans $H^m(\Omega)^N$ (problème des conditions aux limites) sont contournées en utilisant systématiquement les fonctions u_j, dérivées de u par rapport au temps : nous montrons les propriétés correspondantes des fonctions u_j, $j \in \mathbb{N}$, dans l'espace D(A), puis en utilisant les équations (1)-(2) que nous dérivons aussi par rapport au temps, nous en déduisons les propriétés de ces fonctions dans l'espace $H^m(\Omega)^N$.

L'article [D], réalisé en collaboration avec C. Foias, concerne à nouveau les solutions des équations de Navier-Stokes périodiques en espace et associées à une force f nulle. Introduisant une notion d'arc sous-intégral relatif à ces équations, nous obtenons des relations entre le comportement

lorsque $t \to +\infty$ et le comportement à des instants finis. En particulier, nous montrons que, si la donnée initiale u_0 donne naissance à une solution régulière et est choisie telle que sa norme du gradient dans $(L^2)^3$ soit assez grande, alors il existe un intervalle de temps très court sur lequel la solution correspondante décroît très rapidement : cette propriété signifie que toute solution régulière, issue d'une donnée initiale dont la norme du gradient dans $(L^2)^3$ est grande, décroît en fait en un intervalle de temps très court vers son état d'équilibre.

Nous donnons aussi une estimation du réel Λ caractérisant le comportement, lorsque $t \to +\infty$, de la solution par rapport au réel $(\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|)$.

Cette propriété a des conséquences sur le comportement à tout instant des solutions issues de données initiales appartenant aux variétés spectrales introduites par C. Foias et J.C. Saut [3] : nous avons récemment montré que, si u_0 est bien choisi, les solutions correspondantes se comportent comme en dimension d'espace 2, c'est-à-dire que la norme du gradient décroît à tout instant $t > 0$.

Bibliographie

[1] C. Foias, C. Guillopé, R. Temam, Lagrangian representation of the flow associated to a weak solution of the Navier-Stokes equations, à paraître.

[2] C. Foias, G. Prodi, Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 39 (1967), p. 1-34.

[3] C. Foias, J.C. Saut, Asymptotic behavior, as $t \to +\infty$, of solutions of Navier-Stokes equations and nonlinear spectral manifolds, Ind. Math. J., à paraître.

(Cf. aussi, Note en français, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 293, série I (1981), p. 241-244).

[4] C. Foias, R. Temam, Sur la détermination d'un écoulement fluide par des observations discrètes, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 295, série I (1982), p. 239-241.

[5] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63 (1934), p. 193-248.

[6] R. Temam, Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis, NSF/CBMS Regional Conference, Dekalb (1981), SIAM 1983.

S O M M A I R E

[A] *New a priori estimates for Navier-Stokes equations in dimension 3.*
Comm. Part. Diff. Eq., 6, 329-359 (1981).
En collaboration avec C. Foias et R. Temam.

[A] Annexe : *Deux nouvelles estimations a priori des solutions des équations de Navier-Stokes sur un domaine borné de* $\mathbb{R}^3$.

[B] *Comportement à l'infini des solutions des équations de Navier-Stokes et propriété des ensembles fonctionnels invariants (ou attracteurs).*
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 32, 1-37 (1982).

[C] *Remarques à propos du comportement, lorsque* $t \to +\infty$ *, des solutions des équations de Navier-Stokes associées à une force nulle.*
Bull. Soc. Math. France, 111(2), à paraître (1983).

[D] *Flot des équations de Navier-Stokes sur leurs sous-ensembles spectraux.*
En collaboration avec C. Foias.

Paru in

COMM. IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, 6(3), 329-359 (1981).

NEW A PRIORI ESTIMATES FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS IN DIMENSION 3

Ciprian Foias *Colette Guillopé*

Roger Temam

Mathématiques - Bâtiment 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay , FRANCE

INTRODUCTION

This paper is dealing with the regularity of the weak solutions of the periodic Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \text{grad } p = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \tag{0.1}$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \tag{0.2}$$

$$u(.,0) = u_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3, \tag{0.3}$$

$$u(.,t) \text{ and } p(.,t) \text{ are Q-periodic, } \forall\, t \in [0,\infty) , \tag{0.4}$$

where the cube $Q = \prod_{i=1}^{3}]0,L_i[$, with $L_i > 0$, the kinematic viscosity ν , u_0 and f are given ; the velocity $u = (u_1,u_2,u_3)$ and the pressure p are the unknown functions

defined on $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

It is well-know that, for f and u_0 given smooth enough, Problem (0.1)-(0.4) admits one weak solution (u,p) ; the function u satisfies : for any $T > 0$,

$$(0.5) \qquad u \in L^\infty(0,T;X_0) \cap L^2(0,T;X_1) ,$$

$$(0.6) \qquad \int_0^T |u(t)|_1^2 \, dt \leqslant c_1(1+T)$$

where the constant c_1 depends on the data ν, Q, f and u_0 (cf. J.L. Lions [12], R. Temam [14]). Above, and in the sequel, X_m , $m \geqslant 0$, denotes a subspace of $\mathbb{H}^m_{per}$ described below, where $\mathbb{H}^m_{per}$ is the space of the restrictions to Q of the Q-periodic vector functions, which are defined on $\mathbb{R}^3$ and are locally in the Sobolev space $(H^m)^3$.

In this paper we prove a regularizing effect of the Navier-Stokes equations, by showing that the weak solution satisfies $u(t) \in \mathbb{H}^m_{per}$, for almost every $t \in [0,\infty)$ and for arbitrarily large m's . This result follows from apparently new a priori estimates, of the type :

$$(0.7) \qquad u \in L^{\alpha_m}(0,T;X_m) , \int_0^T |u(t)|_m^{\alpha_m} \, dt \leqslant c_m(1+T) ,$$

$\forall\, T>0$, $\forall\, m \geqslant 1$, where $(\alpha_m)_{m\geqslant 1}$ is a sequence of real positive numbers decreasing to 0 as $m \longrightarrow \infty$.

After some preliminary material given in Sections 1 and 2 , we establish (0.7) in Section 3. Finally in Section 4 we prove a result of analyticity in time of the solution in a Sobolev space $\mathbb{H}^{m+1}$, when f is analytic in t with value in $\mathbb{H}^{m-1}$: this relies on an inequality established in Section 2 and on the methods of [5].

PLAN

1 - PRELIMINARIES

2 - A PRIORI ESTIMATES AND REMARKS ABOUT REGULARITY

3 - ESTIMATES IN $L^{\alpha_m}(0,T ; \mathbb{H}^m(Q))$

4 - TIME ANALYTICITY

1 - PRELIMINARIES

1.1. Notations

We denote by $(.,.)$ and $|.|$ or $|.|_0$ the scalar product and the norm in $L^2(Q)$ and $\mathbb{L}^2(Q) = (L^2(Q))^3$. Let $\mathbb{H}^{\dot{m}}_{per}$ be the subspace of $\mathbb{H}^m_{per}$ functions (*) with zero mean-value : $\mathbb{H}^{\dot{m}}_{per}$ equipped with the scalar product

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \tag{1.1}$$

is an Hilbert space, the associated norm is denoted by $|.|_m$. The scalar product and the norm in $\mathbb{H}^{\dot{1}}_{per}$ will be denoted also by $((.,.))$ and $\|.\|$.

Let us define the spaces and the operators used in periodic Navier-Stokes equations theory (cf. R. Temam[14], C. Foias-R.Temam [3]-[4]). Let $(\Gamma_i)_{i=1\ldots6}$ denote the faces of the cube Q ; we suppose that Γ_{2i-1} and Γ_{2i} $(i=1,2,3)$ are opposite and we set :

$$H = \{u \in \mathbb{L}^2(Q),\ \operatorname{div} u = 0,\ \int_Q u\,dx = 0,\ u.n_{|\Gamma_{2i-1}} = -u.n_{|\Gamma_{2i}},\ i=1,2,3\}$$

where n is the unit outward normal on ∂Q, and

(*)For Sobolev spaces theory, see R.A. Adams [1], J.L. Lions-E. Magenes [11].

$$X_m = \mathbb{H}^m_{per} \cap H \ , \quad m \geqslant 0 \ , \quad V = X_1 \ .$$

Let A be the linear operator from V into V' defined by :

$$(1.2) \qquad <A(u),v>_{V',V} = ((u,v)) \ , \ \forall \ v \in V \ ;$$

A is an isomorphism from V onto V', the dual space of V, and the restriction of A to X_2 coincides with the operator $-\Delta$ restricted to X_2 ; $u \longrightarrow |Au|$ is a norm over X_2 equivalent to the norm $|.|_2$ defined by (1.1). Furthermore, the operator $A^{-1} : H \longrightarrow H$ is self-adjoint and compact, and hence there exists an orthonormal basis $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ in H made of eigenfunctions of A^{-1} :

$$Aw_m = \lambda_m w_m \ , \qquad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$$

It is clear that :

$$(1.3) \qquad |v| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|v\| \ , \ \forall \ v \in V \ .$$

For $u, v, w \in \mathbb{H}^1(Q)$, we set

$$b(u,v,w) = \int_Q u_j \, D_j v_k \, w_k \, dx \ ; \qquad (*)$$

b is a trilinear continuous form on $[\mathbb{H}^1(Q)]^3$. Moreover, the functional b is continuous on $\mathbb{H}^{s_1}(Q) \times \mathbb{H}^{s_2+1}(Q) \times \mathbb{H}^{s_3}(Q)$, where

$$(1.4) \quad s_\alpha \geqslant 0 \ , \text{ and } \quad s_1 + s_2 + s_3 \geqslant 3/2 \ \text{ if all } s_\alpha \neq 3/2$$
$$s_1 + s_2 + s_3 > 3/2 \ \text{ if some } s_\alpha = 3/2$$

(*) Here and in the sequel, the convention of summation of repeated indices is adopted.

(cf. C. Foias-R. Temam [4]). For $u,v \in \dot{\mathbb{H}}^1(Q)$ let $B(u,v) \in V'$ and $b(u)$ be defined by

$$\langle B(u,v),w\rangle = b(u,v,w) , \quad \forall\, w \in V ,$$

$$B(u) = B(u,u) .$$

We infer from (1.4) :

$$(1.5) \qquad |B(u,v)| \leq c_Q |u|_1 \, |v|_1^{1/2} \, |v|_2^{1/2} , \forall\, u \in \mathbb{H}^1(Q) , \; v \in \mathbb{H}^2(Q) .$$

Here and in the sequel, c_Q will denote a constant depending only on Q .

All through this paper, we will assume that

$$(1.6) \qquad u_0 \in X_m \text{ for some } m \geq 0 ,$$

$$(1.7) \qquad f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ ; X_m) , \text{ for some } m \geq 0 .$$

The norm in this space is denoted $|.|_{m,\infty}$.

We recall that Hopf-Leray Theorem on the existence of weak solutions to (0.1)-(0.4) asserts that for f and u_0 given, satisfying (1.6)(1.7) with $m=0$, there exists at least one weak solution u of (0.1)-(0.4), such that

$$(1.8) \qquad u \in L^\infty([0,\infty);H) \cap L^2_{loc}([0,\infty);V)$$

(cf. [5,7,8,9,10,12,14]).

1.2. The energy inequality and its consequences.

We recall here (without proof) some well-known results (cf. R. Temam[14], C. Foias-G. Prodi [2]).

By taking formally the scalar product in $\mathbb{L}^2(Q)$ of (0.1) with $u(t)$, we obtain the energy inequality :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 \leqslant |f(t)|\,|u(t)| \quad . \tag{1.9}$$

This a priori estimate plays an essential role in the proof of existence of the weak solutions (1.8). Indeed, using the inequality (1.3) and integrating (1.9) over $(0,t)$, we obtain

$$|u(t)| \leqslant |u(0)|\, e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|f|_{0,\infty}}{\nu\lambda_1}(1 - e^{-\nu\lambda_1 t}) \tag{1.10}$$

$$\int_0^t \|u(\tau)\|^2\, d\tau \leqslant \frac{1}{2\nu}|u(0)|^2 + \frac{|f|_{0,\infty}\,|u(0)|}{\nu^2\lambda_1} + \frac{|f|_{0,\infty}^2\, t}{\nu^2\lambda_1} \quad . \tag{1.11}$$

Hence we have

$$|u|_{0,\infty} \leqslant |u(0)| + \frac{|f|_{0,\infty}}{\nu\lambda_1} \tag{1.12}$$

and there exists a constant c_1, depending only on ν, Q, $|f|_{0,\infty}$ and $|u(0)|$ such that, for any $T>0$,

$$\int_0^T \|u(t)\|^2\, dt \leqslant c_1(1+T) \quad . \tag{1.13}$$

We infer also from these inequalities that

$$\begin{cases} \limsup\limits_{T\to+\infty} |u(T)| \leqslant \dfrac{|f|_{0,\infty}}{\nu\lambda_1} \\[2ex] \limsup\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \|u(t)\|^2\, dt \leqslant \dfrac{|f|_{0,\infty}^2}{\nu^2\lambda_1} \end{cases} \quad . \tag{1.14}$$

Remark 1.1. The weak solutions of (0.1)-(0.4) are not sufficiently regular and one cannot obtain (1.9)-(1.11) directly. These a priori estimates are usually proved on the Galerkin approximation (or some

other regular approximation, cf. Theorem 2.2 , Proof of point (i).) and by passing then to the limit.

2 - A PRIORI ESTIMATES AND REMARKS ABOUT REGULARITY

2.1. Some a priori estimates

Theorem 2.1. If (u,p) is a smooth solution of (0.1-(0.4), then for each $t>0$, for any $m\geq 1$,

$$(2.1)\quad \frac{d}{dt}\,|u(t)|_m^2 + \nu|u(t)|_{m+1}^2 \leq K_m\,(1 + |u(t)|_1^2\,|u(t)|_m^{\frac{4m}{2m-1}})$$

where the constant K_m depends on the data ν, Q and $|f|_{m-1,\infty}$.
Moreover, for any $m\geq 3$, we have

$$(2.2)\quad \frac{d}{dt}\,|u(t)|_m^2 + \nu|u(t)|_{m+1}^2 \leq K_m'\,|u(t)|_m\,(1 + |u(t)|_1^2)^{2m+1}$$

where K_m' depends on the data ν, Q and $|f|_{m-1,\infty}$.

Proof. Let $m\geq 1$. We apply the operator $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3}$, with $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ and $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m$, to equation (0.1) ; we then take the scalar product in $\mathbb{L}^2(Q)$ of the resulting equation with $D^\alpha u(t)$. By using the condition (0.2) we obtain

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|u(t)|_m^2 + \nu|u(t)|_{m+1}^2 = -\sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha(u(t).\nabla)u(t), D^\alpha u(t))$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha f(t), D^\alpha u(t))\,.$$

We have to estimate the nonlinear term. For this purpose we remark that, because of the free divergence condition (0.2),

(2.3) $(D^\alpha(u(t).\nabla)u(t),D^\alpha u(t))$

$$= (D^\alpha(u(t).\nabla)u(t) - (u(t).\nabla)D^\alpha u(t),D^\alpha u(t)) \ .$$

(i) Proof of (2.1) - We denote by δ^j any differential operator of the form D^α , with $|\alpha| = j$ $(0\leqslant j\leqslant m)$. Using (2.3) and the Leibnitz formula we see that the left-hand side of (2.3) is, for $|\alpha| = m$, the sum of integrals

$$\int_\Omega \delta^j u_k \ (\delta^{m-j} D_k u)D^\alpha u \ dx \ , \quad j = 1,\ldots,m,$$

and thus by Hölder inequality, the modulus of the left-hand side of (2.3) is less or equal to a finite sum of terms

$$|\delta^j u(t)|_{\mathbb{L}^3(Q)} \ |\delta^{m+1-j}u(t)|_{\mathbb{L}^6(Q)} \ |D^\alpha u(t)| \ .$$

Then, by the injection Sobolev theorems $(H^1(Q) \subset L^6(Q)$, $H^{1/2}(Q) \subset L^3(Q))$ we have :

$$(2.4) \quad |(D^\alpha(u(t).\nabla)u(t),D^\alpha u(t))| \leqslant c_{Q,m}|u(t)|_{j+\frac{1}{2}}|u(t)|_{m+2-j}|u(t)|_m$$

(the constant $c_{Q,m}$ (resp. $c_{Q,m,\nu}$) depending on Q,m (resp. Q,m,ν)). We then consider the spaces $\mathbb{H}^{j+1/2}$ and $\mathbb{H}^{m+2-j}$ as interpolation spaces of $\mathbb{H}^1$ and $\mathbb{H}^{m+1}$. Precisely, we have for $j = 1,\ldots,m$

$$\mathbb{H}^{j+1/2} = (\mathbb{H}^{m+1},\mathbb{H}^1)_\theta \ , \text{ with } \ \theta = 1 - \frac{j}{m} + \frac{1}{2m} \ ,$$

$$\mathbb{H}^{m+2-j} = (\mathbb{H}^{m+1},\mathbb{H}^1)_\theta, \text{ with } \ \theta = \frac{j}{m} - \frac{1}{m} \ ,$$

and we deduce from (2.4)

$$(2.5)\quad |(D^{\alpha}(u(t).\nabla)u(t),D^{\alpha}u(t))|$$

$$\leq c_{Q,m}\,|u(t)|_1^{1-1/2m}\,|u(t)|_{m+1}^{1+1/2m}\,|u(t)|_m$$

$$\leq \text{(by virtue of Young inequality)}$$

$$\leq \frac{\nu}{4}\,|u(t)|_{m+1}^2 + c_{Q,m,\nu}\,|u(t)|_1^2\,|u(t)|_m^{\frac{4m}{2m-1}} .$$

Finally the linear term is estimated as follows

$$|(D^{\alpha}f(t),D^{\alpha}u(t)| \leq |f|_{m-1,\infty}\,|u(t)|_{m+1} \leq \frac{\nu}{4}\,|u(t)|_{m+1}^2 + \frac{1}{\nu}|f|_{m-1,\infty}^2 .$$

Hence inequality (2.1) is proved.

(ii) Proof of (2.2) - In inequality (2.5), we consider $\mathbb{H}^m$ as an interpolation space of $\mathbb{H}^1$ and $\mathbb{H}^{m+1}$, that is

$$\mathbb{H}^m = (\mathbb{H}^{m+1}\ ,\ \mathbb{H}^1)_{\theta}\quad ,\quad \text{with } \theta = \frac{1}{m} .$$

Then (2.5) implies

$$(2.6)\quad |(D^{\alpha}(u(t).\nabla)u(t),D^{\alpha}u(t))|$$

$$\leq c_{Q,m}\,|u(t)|_1^{1+1/2m}|u(t)|_{m+1}^{2-1/2m}$$

$$\leq \text{(by virtue of Young inequality)}$$

$$\leq \frac{\nu}{4}\,|u(t)|_{m+1}^2 + c_{Q,m,\nu}\,|u(t)|_1^{4m+2} .$$

The linear term is estimated as in Section (i) above.
Hence inequality (2.2) is proved.

2.2. Existence of regular solutions

Let $m \geq 0$. We say that a solution u of (0.1)-(0.4) is $\mathbb{H}^m$-regular on (t_1,t_2) $(0 \leq t_1 < t_2)$ if $u \in \mathcal{C}((t_1,t_2); \mathbb{H}^m(\Omega))$. We say that a $\mathbb{H}^m$-regularity interval (t_1,t_2) is maximal if there does not exist any greater interval of $\mathbb{H}^m$-regularity than (t_1,t_2) .

Let us remark that if u is a $\mathbb{H}^m$-regular solution on $[0,T]$, then any other solution v such that

$$v \in L^\infty([0,\infty);H) \cap L^2_{loc}([0,\infty);V)$$

$$v(0) = u(0)$$

coincides with u on $[0,T]$ (cf. [14]).

The local existence of such regular solutions is given by the following theorem.

Theorem 2.2. Let $m \geq 1$.

For u_o given in X_m and f given in $L^\infty([0,\infty[;X_{m-1})$, there exists $t_1(u_o) > 0$, depending on u_o , f, ν and Ω , and there exists a unique u

$$u \in \mathcal{C}([0,T];X_m) \cap L^2(0,T;X_{m+1}) \ , \ \forall\, 0 < T < t_1(u_o),$$

which is solution of the periodic Navier-Stokes equations (0.1)-(0.4), and satisfies (2.1)-(2.2). The number $t_1(u_o)$ is independent of m, for $m \geq 1$.

Proof : (i) We only give the sketch of the proof of the existence and uniqueness of a solution. A proof for the case m=1 is given in [14] : it is based on a Galerkin approximation of V, where the basis is the basis of eigenfunctions (w_j) of the

operator A^{-1} (see §.1.1). The proof is similar for $m>1$.

In the general case ($m>1$), we may introduce a perturbed problem by adding a term $\ldots + \varepsilon(-\Delta)^{2r}u$ to equation (0.1) with r as large as necessar (cf. J.L. Lions [12]). We show that the perturbed problem admits a unique solution in $L^2(0,T;X_{2r}) \cap L^\infty(0,T;H)$ which satisfies the inequalities (2.1) or (2.2).

Furthermore, we deduce from these inequalities that there exists $t_m(u_o) > 0$ such that the solutions of the perturbed problem remain bounded in the space $L^\infty(0,T,X_m) \cap L^2(0,T;X_{m+1})$ $\forall T<t_m(u_o)$.

Then, the passage to the limit, as $\varepsilon \longrightarrow 0$, is standard (cf. J.L. Lions [12], R.Temam [14])and we obtain (0.1)-(0.4) and (2.1)-(2.2) at the limit.

(ii) Let us now prove that the number $t_m(u_o)$ is independent of $m \geqslant 1$. Let $m \geqslant 2$. By point (i) we know that the function $t \longmapsto |u(t)|_1$ is bounded on $[0,T]$, $\forall\ T < t_1(u_o)$. Let $T < t_1(u_o)$. From (2.2), we deduce that for all $t \in [0,T]$

$$\frac{d}{dt}\,|u(t)|_m^2 \leqslant K_m'\,(1 + |u(t)|_1^2)^{2m+1}$$

and, by integration over $(0,t)$,

$$\sup_{t\in[0,T]} |u(t)|_m^2 \leqslant |u(o)|_m^2 + K_m'\Big(\int_o^T (1+|u(t)|_1^2)^{2m+1}\,dt\Big).$$

Hence for any $0<T<t_1(u_o)$, the solution u belongs to $L^\infty(0,T\,;X_m)$. Moreover, integrating (2.2) over $(0,T)$, we deduce that u belongs to $L^2(0,T\,;X_{m+1})$. Hence $t_m(u_o)$ is equal to $t_1(u_o)$.

■

Remark 2.1. We deduce from Theorem 2.2 that, if (t_ℓ, t_r) is a maximal $\mathbb{H}^m$- regularity interval, then

$$\lim_{t \to t_r} |u(t)|_m = +\infty \ .$$

Indeed, otherwise Theorem 2.2 would show that there exist an $\varepsilon>0$ and a $\mathbb{H}^m$-regular solution defined on $[t_r, t_r+\varepsilon)$, and t_r would not be the end of an interval of $\mathbb{H}^m$-regularity of u. ∎

As a consequence of Theorem 2.2, we have the following result.

Theorem 2.3. We assume that u_o is given in $X_o = H$ and f is given in $L^\infty([0,\infty) ; X_{m-1})$ $(m \geq 1)$, Then the periodic Navier-Stokes equations (0.1)-(0.4) admit a weak solution u which is $\mathbb{H}^m$-regular on an open set of $(0,\infty)$, whose complement has Lebesgue measure 0.

Proof : Let us denote by $\mathcal{U}$ the set of the solutions of (0.1)-(0.4) which are in $L^\infty([0,\infty) ; H) \cap L^2_{loc}([0,\infty) ; X_1)$. $\mathcal{U}$ depends on the data ν, Q, f and u_o, and Hopf-Leray Theorem (cf. Section 1) implies that $\mathcal{U} \neq \emptyset$.

Let $m \geq 1$. We set, for any $p = 1,\ldots,m$,

$$(2.7)\quad \mathcal{O}_p = \{t \in \mathbb{R}_+ \ , \ \exists\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, u \in \mathcal{U} \ , \ u \in \mathcal{C}(]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\ ; X_p)\}$$

$$(2.8)\quad \Omega_p = \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{O}_p$$

$$(2.9)\quad \Sigma_p = \{t \in \Omega_p \ , \ \forall\, u \in \mathcal{U} \ , \ u(t) \notin X_p\}^{(*)} \ .$$

The set $\mathcal{O}_m$ is open (we will prove using Theorem 2.2 that $\mathcal{O}_m$ is not empty), $\mathcal{O}_m$ is a countable union of open intervals and our goal (for Theorem 2.3) is to show that meas $\Omega_m = 0$. Because of Theorem 2.2(i), if $t_o \in \Omega_m \setminus \Sigma_m$, then t_o is the left end of an interval in $\mathcal{O}_m$; hence $\Omega_m \setminus \Sigma_m$ is at most countable and

(*) Any weak solution u is weakly continuous with value in H and hence $u(t)$ makes sense for every $t \geq 0$.

it is sufficient, for Theorem 2.3, to prove that

$$\text{meas } \Sigma_p = 0 \quad , \quad \forall\, p = 1,\ldots,m. \tag{2.10}$$

((2.10) and Theorem 2.2 imply that $\mathcal{O}_m \neq \emptyset$) .

Let us prove (2.10) by induction on increasing $p \leqslant m$.

For p=1 , (2.10) follows immediately from the property of the weak solution, $u \in L^2_{loc}([0,\infty);V)$ $(V = X_1)$.

Let us assume that, for any q such that $q \leqslant p < m$, we have meas $\Sigma_q = 0$. In particular the set Ω_p has measure 0. Let (t_ℓ, t_r) be a maximal interval of $\mathbb{H}^p$- regularity of u (i.e. a connected component of $\mathcal{O}_p$). We infer from (2.2) that

$$\frac{\frac{d}{dt}\,|u(t)|_p^2}{(1+|u(t)|_p^2)^{2p+1}} + \nu\,\frac{|u(t)|_{p+1}^2}{(1+|u(t)|_p^2)^{2p+1}} \leqslant K_p'' \,. \tag{2.11}$$

Hence, by integration of (2.11) on (t_ℓ, t_r), we obtain

$$\frac{1}{2p}\,(1+|u(t_\ell+o)|_p^2)^{-2p} + \nu \int_{t_\ell}^{t_r} \frac{|u(t)|_{p+1}^2}{(1+|u(t)|_p^2)^{2p+1}}\,dt \leqslant K_p''\,(t_r - t_\ell)$$

since $|u(t_r-o)|_p = +\infty$, (t_ℓ, t_r) being maximal (cf Remark 2.1).

Hence

$$\frac{|u(t)|_{p+1}^2}{(1+|u(t)|_p^2)^{2p+1}} < +\infty \quad , \quad \text{for a.e. } t \in (t_\ell, t_r)$$

and, since $|u(t)|_p < +\infty$ for every t of this interval, we have

$$(2.12) \qquad |u(t)|_{p+1} < \infty \quad \text{for a.e. } t \in (t_\ell, t_r) .$$

This result combined with meas $\Omega_p = 0$ shows that meas $\Sigma_{p+1} = 0$. Therefore (2.10) is true and the result of Theorem 2.3 follows.

Remark 2.2. The existence of an open set of total measure on $(0,\infty)$ on which a weak solution is regular was proved by J. Leray [10] for $f = 0$ and a flow in $\mathbb{R}^3$, cf. also S. Kaniel - M. Shinbrot [15].

3 - ESTIMATES IN $L^{\alpha_m}(0,T ; \mathbb{H}^m(Q))$, $0 < \alpha_m < 1$.

3.1. Statement of the theorem

Theorem 3.1. Let there be given $u_o \in X_\sigma = H$ *and* $f \in L^\infty([0,\infty);X_{m-1})$. *Then any weak solution* u *given by Theorem 2.3 satisfies, for any* $T>0$

$$(3.1) \qquad u \in L^{\alpha_m}(0,T;X_m) , \quad \int_0^T |u(t)|_m^{\alpha_m} \, dt \leq c_m(1+T) ,$$

where the constant c_m *depends on the data* ν, Q, $|f|_{m-1,\infty}$ *and* $|u_o|_o$, *and the sequence* $(\alpha_m)_{m\geq 1}$ *is given by*

$$(3.2) \qquad \alpha_m = \frac{2}{2m-1} , \quad \text{for } m \geq 1 .$$

As a consequence of Theorem 3.1 (proved in Sections 3.2 and 3.3), we have the following result.(*)

(*) In a first version of this work, Theorem 3.1 was proved with $\alpha_m = 2/(5m-6)$. We owe to L. Tartar an improvement of the value of α_m which implies Corollary 3.2.

Corollary 3.2. Let there be given $u_o \in X_o$ *and* $f \in L^\infty([0,\infty);X_1)$. *Then any weak solution* u *given by Theorem 2.3 satisfies, for any* $T>0$

$$u \in L^1(0,T\,;\, \mathbb{L}^\infty(Q)) \ . \tag{3.3}$$

Proof of the Corollary

By Theorem 2.3, we have, for a.e. $t \geqslant 0$, $u(t) \in X_2 \hookrightarrow W^{1,6}(Q)$. Then, by L. Tartar [13], we have, for a.e. $t \geqslant 0$, $u(t) \in \mathbb{L}^\infty(Q)$ and

$$\begin{aligned} |u(t)|_{\mathbb{L}^\infty(Q)} &\leqslant c_Q\, |u(t)|^{1/2}_{L^6(Q)}\ |u(t)|^{1/2}_{W^{1,6}(Q)} \\ &\leqslant c_Q\, |u(t)|^{1/2}_1\ |u(t)|^{1/2}_2 \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

But, by Theorem 3.1, we have

$$u \in L^2(0,T;X_1) \quad \text{and} \quad u \in L^{2/3}(0,T;X_2) \ .$$

Hence, from (3.4) we deduce that

$$u \in L^1(0,T;\ \mathbb{L}^\infty(Q)) \quad \text{and} \quad \int_o^T |u(t)|_{\mathbb{L}^\infty(Q)}\, dt \leqslant c_\infty(1+T)$$

where $c_\infty = c_Q\, c_1^{1/4}\, c_2^{3/4}$ is a constant depending on the data ν, Q, f and $|u_o|_o$.

■

3.2. Some technical Lemmas

The essential result of this Section, which is an application of Section 2, is given in Lemma 3.4 and will be used for proving Theorem 3.1.

Let $m \geqslant 1$. From inequality (2.1), we infer that

$$\frac{\frac{d}{dt}\,|u(t)|^2_m}{(1+|u(t)|^2_m)^{\frac{2m}{2m-1}}} + \nu\, \frac{|u(t)|^2_{m+1}}{(1+|u(t)|^2_m)^{\frac{2m}{2m-1}}} \leqslant K_m\ (1+|u(t)|^2_1) \ . \tag{3.5}$$

We set, for each t such that $u(t) \in X_{m+1}$,

$$(3.6) \qquad k_m(t) = \frac{|u(t)|^2_{m+1}}{(1+|u(t)|^2_m)^{\frac{2m}{2m-1}}} \ , \ \ell_m(t) = (2m-1)\ (1+|u(t)|^2_m)^{-\frac{1}{2m-1}} \ .$$

Because of Theorem 2.3, the function k and ℓ are defined for a.e. $t \geqslant 0$.

Lemma 3.3. Let (t_ℓ, t_r) be a $I\!H^m$-regularity interval. Then there exists a constant K''_m depending on ν, Q and $|f|_{m-1,\infty}$ such that

$$(3.7) \qquad \nu\left(\int_{t_\ell}^{t_r} k_m(t)\ dt\right) \leqslant K''_m \ \left(1 + \int_{t_\ell}^{t_r} (1+|u(t)|^2_1) dt\right) \ .$$

Moreover, if (t_ℓ, t_r) is a maximal $I\!H^m$-regularity interval, then we have

$$(3.8) \qquad \nu\left(\int_{t_\ell}^{t_r} k_m(t)\ dt\right) \leqslant K''_m \ \left(\int_{t_\ell}^{t_r} (1 + |u(t)|^2_1)\ dt\right) .$$

Proof.

Let (t_ℓ, t_r) be a $I\!H^m$-regularity interval. Integrating (3.6) over (t_ℓ, t_r) we obtain

$$(3.9) \qquad \ell_m(t_\ell+0) - \ell_m(t_r-0) + \nu\left(\int_{t_\ell}^{t_r} k_m(t)\ dt\right) \leqslant K_m \left[\int_{t_\ell}^{t_r} (1+|u(t)|^2_1) dt\right] .$$

The function ℓ_m being bounded, we then deduce

$$-(2m-1) + \nu\left(\int_{t_\ell}^{t_r} k_m(t)\ dt\right) \leqslant K_m \left(\int_{t_\ell}^{t_r} (1+|u(t)|^2_1)\ dt\right) .$$

Hence inequality (3.7) is proved, with $K''_m = \max(2m-1, K_m)$.

If moreover the interval (t_ℓ, t_r) is maximal, then we have $|u(t_r-0)|_m = +\infty$ (cf. Remark 2.1). From (3.9) we then deduce inequality (3.8).

■

Lemma 3.4. *For any* $T>0$, *we have*

$$\nu\Big(\int_0^T k_m(t)\,dt\Big) \leqslant L_m(1+T)\,, \tag{3.10}$$

the constant L_m *depending on* ν, Q, $|f|_{m-1}$, *and* $|u(0)|_0$.

Proof.

Let $T>0$. Because of Theorem 2.3, there exists a countable set of maximal $\mathbb{H}^m$-regularity intervals (t_{ℓ_i}, t_{r_i}) whose complement in $[0,\infty)$ has Lebesgue measure 0. Then

$$\int_0^T k_m(t)\,dt = \int_{t_{\ell_0}}^T k_m(t)\,dt + \sum_{i\geqslant 1} \int_{t_{\ell_i}}^{t_{r_i}} k_m(t)\,dt\,.$$

From inequalities (3.7)-(3.8), we deduce that

$$\nu\Big(\int_0^T k_m(t)\,dt\Big) \leqslant K_m''\Big(1 + \int_0^T (1+|u(t)|_1^2)\,dt\Big)\,.$$

Using inequality (1.13), we obtain (3.10) with $L_m = K_m''(1+c_1)$.

■

3.3. Proof of Theorem 3.1.

The Theorem is proved by induction on the index m. Let $T>0$.

(i) Case $m=1$ - We know (cf. Section 1.2) that Problem (0.1)-(0.4) admits a weak solution u in $L^2(0,T;X_1)$ which moreover satisfies

$$\int_0^T |u(t)|_1^2\,dt < c_1(1+T)\,,$$

the constant c_1 depending on ν, Q, $|f|_{0,\infty}$ and $|u_0|_0$.
Let $\alpha_1 = 2 = \frac{2}{\varepsilon_1}$.

(ii) Assume that we have computed the α_j's($\alpha_j>0$), for $j = 1,\dots,m$, such that any solution u given by Theorem 2.3 satisfies

$$u \in L^{\alpha_j}(0,T;X_j) \quad , \quad \int_0^T |u(t)|_j^{\alpha_j}\, dt \leqslant c_j(1+T) \quad . \tag{3.11}$$

Let us compute the exponant $\alpha_{m+1} = \frac{2}{\varepsilon_{m+1}}$ corresponding to the index $m+1$. Using the function k_m defined by (3.6) we have

$$\int_0^T |u(t)|_{m+1}^{\alpha_{m+1}}\, dt = \int_0^T [k_m(t)]^{\frac{1}{\varepsilon_{m+1}}} \left[1 + |u(t)|_m^2\right]^{\frac{2m}{2m-1}\frac{1}{\varepsilon_{m+1}}}\, dt \quad .$$

By Hölder inequality, we obtain

$$\int_0^T |u(t)|_{m+1}^{\alpha_{m+1}}\, dt \leqslant \left[\int_0^T k_m(t)dt\right]^{\frac{1}{\varepsilon_{m+1}}} \left[\int_0^T (1+|u(t)|_m^2)^{\frac{1}{2m-1}\frac{1}{\varepsilon_{m+1}-1}}\, dt\right]^{1-\frac{1}{\varepsilon_{m+1}}} .$$

Using Lemma 3.4 and the induction hypothesis (3.11) with $j=m$, we deduce the value of $\varepsilon_{m+1} = \frac{2}{\alpha_{m+1}}$ as a function of $\varepsilon_m = \frac{2}{\alpha_m}$:

$$\frac{2m}{2m-1}\frac{1}{\varepsilon_{m+1}-1} = \frac{1}{\varepsilon_m} \quad .$$

Because of $\varepsilon_1 = 1$, we then obtain $\varepsilon_m = 2m - 1$, i.e. the relation (3.2). Relations (3.1) are thus proved by induction and Theorem 3.1 is established.

■

Remark 3.1. It is sufficient for Theorems 2.2, 2.3 and 3.1 to assume that $f \in L^2([0,\infty);X_{m-1})$ instead of $L^\infty([0,\infty);X_{m-1})$. The only difference in this case is that we loose the inequality in (3.1) showing a simple dependence of the bound of $\int_0^T |u(t)|_m^{\alpha_m} dt$ with respect to T. With similar computations we arrive instead to the recurrence formula :

$$\int_0^T |u(t)|_{m+1}^{\alpha_{m+1}} dt \leq K_m''' \cdot \left(|u(0)|^2 + \int_0^T |f(t)|_{m-1}^2 dt\right) \cdot \left(\int_0^T (1+|u(t)|_m^{\alpha_m}) dt\right)^{\frac{2m}{2m+1}} .$$

4 - TIME ANALYTICITY

In this section, we extend to the case where f is an analytic X_{m-1}-valued function the analyticity result proved by C. Foias-R. Temam [5] for m = 1. The proof is based on a Galerkin approximation of the complexified problem.

4.1 Notations - Definitions

Let P_k (k = 1,2,...) denote the orthogonal projection in H onto the space spanned by $w_1,\ldots w_k$. We remark (cf Section 1.1) that, in the periodic case, we have for any k = 1,2,...

$$(4.1) \qquad Au_k = - P_k \Delta u_k = - \Delta u_k \ , \ \forall u_k \in Sp(w_1,\ldots,w_k) .$$

Let $H_{\mathbb{C}}$ (resp. $V_{\mathbb{C}}$, $X_{m,\mathbb{C}}$) denote the complexified space of H (resp. V, X_m). By linearity, A (resp. P_k, B) extends to a selfadjoint operator in $H_{\mathbb{C}}$ (resp. to the orthogonal projection in $H_{\mathbb{C}}$ onto $\mathbb{C}w_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}w_k$, resp. to a bilinear operator from $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}}$ into $V_{\mathbb{C}}'$).

Let Y denote any Banach space. We will say that the Y-valued function is Y-analytic on an open set D of $\mathbb{C}$ if the function $D \to Y$ is analytic.

All through this Section, we will assume that

$$(4.2)\qquad \begin{cases} f \text{ is a } X_{m-1,\mathbb{C}} \cap H_{\mathbb{C}}\text{-analytic function on} \\ \text{a neighborhood } S \text{ of } \{\mathrm{Re}\,\zeta > 0,\ \mathrm{Im}\,\zeta = 0\} \text{ and is} \\ \text{bounded from } S \text{ into } X_{m-1,\mathbb{C}} \cap H_{\mathbb{C}}\ . \end{cases}$$

4.2 Study of an approximate problem

We will consider the Galerkin approximation of $H_{\mathbb{C}}$, where the basis is the basis of eigenfunctions of A^{-1}. Let $k = 1,2,\ldots$ be fixed and denote by u_k the solution of the "approximate" system in $P_k\, H_{\mathbb{C}}$

$$(4.3)\qquad \frac{d\, u_k(\zeta)}{d\zeta} + \nu\, Au_k(\zeta) + P_k\, B(u_k(\zeta)) = P_k\, f$$

$$(4.4)\qquad u_k(\zeta) = P_k\, u_o\ .$$

For any $m \geq 0$, the function u_k is a $P_k\, X_m$-analytic function on a neighborhood of $\zeta = 0$, and in fact in S due to the following a priori estimate.

Proposition 4.1 *Let $m \geq 1$. Then the solution u_k of (4.3)-(4.4) satisfies, for each (s,θ) such that $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ and $se^{i\theta} \in S$,*

$$(4.5)\qquad \frac{d}{ds}|u_k(se^{i\theta})|_m^2 + \nu\cos\theta\,|u_k(se^{i\theta})|_{m+1}^2 \leq \frac{K_m'}{(\cos\theta)^{4m-1}}\left(1+|u_k(se^{i\theta})|_1^2\right)^{2m+1},$$

where the constant K_m' depends on ν, Q, $|f|_{m-1,\infty}$.

Proof : Let $\zeta = se^{i\theta} \in S$, with $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. We have

$$(4.6)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|u_k(se^{i\theta})|_m^2 = \mathrm{Re}\left(\frac{du_k(se^{i\theta})}{ds},\ u_k(se^{i\theta})\right)_m = \mathrm{Re}\ e^{i\theta}\left(\frac{du_k(\zeta)}{d\zeta},u_k(\zeta)\right)_m .$$

By using Equation (4.3), we obtain

$$(4.7)\quad \left(\frac{du_k(\zeta)}{d\zeta},u_k(\zeta)\right) = \left(-\nu\, Au_k(\zeta) - P_k\, B(u_k(\zeta)) + P_k\, f(\zeta),u_k(\zeta)\right)_m .$$

But, since $u_k(\zeta) \in P_k\, X_m$, we have

$$(4.8)\qquad \left(P_k\, f(\zeta),\ u_k(\zeta)\right)_m = \left(f(\zeta),\ u_k(\zeta)\right)_m$$

and similarly for the non-linear term.

We then deduce from (4.7)-(4.8) that

$$\left(\frac{du_k(\zeta)}{d\zeta},\ u_k(\zeta)\right)_m = -\nu|u_k(\zeta)|_{m+1}^2 - \left(B(u_k(\zeta)),u_k(\zeta)\right)_m + \left(f(\zeta),u_k(\zeta)\right)_m$$

and, by virtue of (4.6),

$$(4.9)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|u_k(\zeta)|_m^2 + \nu\cos\theta\,|u_k(\zeta)|_{m+1}^2 \leq \left|\left(B(u_k(\zeta)),u_k(\zeta)\right)_m\right| + \left|\left(f(\zeta),u_k(\zeta)\right)_m\right| .$$

In order to estimate the left-hand side of (4.9), we proceed as in the proof of Inequality 2.2. Indeed, by virtue of (2.6), we have, with $\zeta = se^{i\theta}$ $(|\theta| < \frac{\pi}{2})$,

$$\sum_{|\alpha|=m} \left|\left(D^\alpha(u_k(\zeta).\nabla)u_k(\zeta),\ D^\alpha u_k(\zeta)\right)\right|$$

$$\leq C_{Q,m}\ |u_k(\zeta)|_1^{1+\frac{1}{2m}}\ |u_k(\zeta)|_{m+1}^{2-\frac{1}{2m}}$$

$$\leq \text{(by virtue of Young inequality)}$$

$$(4.10) \qquad \leq \frac{\nu}{4}\cos\theta\ |u_k(\zeta)|^2_{m+1} + \frac{C_{Q,m,\nu}}{(\cos\theta)^{4m-1}}\ |u_k(\zeta)|^{4m+2}_1 \ .$$

The linear term is estimated as follows :

$$(4.11) \qquad \sum_{|\alpha|=m} \left(D^\alpha f(\zeta), D^\alpha u_k(\zeta)\right) \leq \frac{\nu}{4}\cos\theta |u_k(\zeta)|^2_{m+1} + \frac{1}{\nu\cos\theta}|f|^2_{m-1,\infty} \ .$$

By use of (4.10)-(4.11) we deduce inequality (4.5) from (4.9). ∎

We now deduce from this a priori estimate that the approximate solution can be extended to an analytic function on a domain of $\mathbb{C}$ which contains (strictly) a segment of $\mathbb{R}$ with origin 0.

Proposition 4.2 *Let $m \geq 1$, $u_o \in X_m$ and f be a X_{m-1}-analytic bounded function. Then the solution u_k of (4.3)-(4.4) can be extended to a $X_{m,\mathbb{C}}$-analytic function on $S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)^o$, where $\Delta_\varepsilon(u_o)^o$ is the interior of the set*

$$(4.12) \qquad \Delta_\varepsilon(u_o)^o = \{se^{i\theta} \mid 0 \leq s \leq 2\cos^3\theta\ t_o(u_o), |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$$

with $t_o(u_o) > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Moreover, on every compact subset of $S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)^o$, u_k belongs to a bounded set (bounded independently of k) of $L^\infty(K ; X_{m,\mathbb{C}}) \cap L^2(K ; X_{m+1,\mathbb{C}})$.

Proof : Integrating the differential inequality (4.5) obtained for m = 1, we deduce that

$$(4.13) \qquad |u_k(se^{i\theta})|^2_1 \leq 1 + 2|u_o|^2_1$$

as long as

$$0 \leq s \leq \frac{3}{8K_1} \cos^3\theta (1 + |u_o|_1^2)^{-2} .$$

Let

$$t_o(u_o) = \frac{3}{16K_1} (1 + |u_o|_1^2)^{-2} . \tag{4.14}$$

Inequality (4.13) shows that u_k extends to a $X_{1,\mathbb{C}}$-analytic function in the set $S \cap \Delta(u_o)$,with

$$\Delta(u_o) = \{se^{i\theta} \mid 0 \leq s \leq 2 \cos^3\theta \; t_o(u_o) \; , \; |\theta| < \tfrac{\pi}{2}\}$$

If we integrate now inequality (4.5) for any $m \geq 2$, we obtain that, for any $\zeta = se^{i\theta} \in \Delta(u_o)$,

$$|u_k(\zeta)|_m^2 \leq |u(o)|_m^2 + \frac{\sigma_m}{(\cos\theta)^{4(m-1)}} \left(1 + |u(o)|_1^2\right)^{2m-1} \tag{4.15}$$

where the constant σ_m depends only on ν, Q, $|f|_{m-1,\infty}$. We deduce from (4.15) that, for every ζ in the set $\Delta_\varepsilon(u_o)$, defined by (4.12), we have

$$|u_k(\zeta)|_m^2 \leq |u(o)|_m^2 + \frac{\sigma_m}{(\sin\varepsilon)^{4(m-1)}} (1 + |u(o)|_1^2)^{2m-1} . \tag{4.16}$$

Besides, let K be a compact included in $S \cap \Delta(u_o)^o$ and $\varepsilon > 0$ be sufficiently small in order that K were included in $\Delta_\varepsilon(u_o)^o$ too. Integrating (4.5) on the set $\Delta_\varepsilon(u_o)$ we obtain after easy computations that

$$\nu\left(\int_K |u_k(se^{i\theta})|^2_{m+1}\, s\, ds\, d\theta\right)$$

$$\leq 2\,\nu\left(\int_{\Delta_\varepsilon(u_o)} |u_k(se^{i\theta})|^2_{m+1}\, t_o(u_o)\cos^3\theta\, ds\, d\theta\right),$$

$$\leq 2\, t_o(u_o)\left[\int_{|\theta|\leq\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\left(|u(o)|^2_m + \frac{\sigma_m(1+|u(o)|^2_1)^{2m-1}}{(\cos\theta)^{4(m-1)}}\right)\cos^2\theta\, d\theta\right],$$

Hence, for any compact $K \subset S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)^o$, we have

$$(4.18)\quad \int_K |u_k(se^{i\theta})|^2_{m+1} s\,ds\,d\theta \leq \frac{\pi}{\nu} t_o(u_o)\left[|u(o)|^2_m + \frac{\sigma_m(1+|u(o)|^2_1)^{2m-1}}{(\sin\varepsilon)^{4(m-1)}}\right]$$

We remark that the estimates (4.16)-(4.18) are uniform with respect to the compact K. Lemma 4.2 is then proved.

4.3 Existence of analytic solutions

Theorem 4.3 *Let $m \geq 1$, $u_o \in X_m$ and f satisfying (4.2). Then there exists $t_o(u_o) > 0$, depending on ν, Q, $|f|_o$ and $|u_o|_1$, and there exists a unique solution u of the periodic Navier-Stokes equations which is X_{m+1}-analytic on $(0, t_o(u_o)]$.*

Proof : Let $\varepsilon > 0$ be fixed. Denote by u the solution of periodic Navier-Stokes equations which is given in Theorem 2.2. Denote by $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ the sequence of $X_{m-1,\mathbb{C}}$-analytic functions on $S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)$, which are solutions of Problem (4.3)-(4.4).

(i) Passage to the limit ($k \to +\infty$). Since the injection $X_{m,\mathbb{C}} \hookrightarrow X_{m-1,\mathbb{C}}$ is compact and that $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ is bounded in $X_{m,\mathbb{C}}$, uniformly

on $\Delta_\varepsilon(u_o)$, we can apply the vector version of the Vitalis's Theorem (cf. E. Hille - R.S. Phillips [6]). Thus there exists a subsequence $\{u_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ which converges in $X_{m-1,\mathbb{C}}$, uniformly on every compact subset of $\Delta_\varepsilon(u_o)^o$, to a $X_{m-1,\mathbb{C}}$-analytic function $\tilde{u}$. But the sequence $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ converges in X_{m-1}, uniformly on $[\eta, t_o(u_o)-\eta]$ to $u, \forall \eta > 0$. Then $\tilde{u}$ is the $X_{m-1,C}$-analytic extension of u to $\Delta_\varepsilon(u_o)^o$. This uniqueness of $\tilde{u}$ implies that all the sequence $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ is convergent in $X_{m-1,\mathbb{C}}$ to $\tilde{u}$, uniformly on every compact subset of $S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)^o$.

(ii) Analyticity of the function $u : (0, t_o(u_o)] \to X_{m+1}$.

Let $j = 1,2 \ldots$ be fixed. Because of the above convergence, the sequence $\{P_j u_k\}_{k=1}^{\infty}$ converges in $X_{m+1,\mathbb{C}}$ to $P_j\tilde{u}$, uniformly on every compact subset of $\Delta_\varepsilon(u_o)^o$. We now let $j \to +\infty$. But we have, for any $K \subset \Delta_\varepsilon(u_o)^o$,

$$(4.19) \qquad \int_K |P_j \tilde{u}(se^{i\theta})|_{m+1}^2 \, s \, ds \, d\theta \leq \overline{\lim_{k\to+\infty}} \int_K |P_j u_k(se^{i\theta})|_{m+1}^2 \, s \, ds \, d\theta$$

$$\leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_K |u_k(se^{i\theta})|_{m+1}^2 \, s \, ds \, d\theta$$

and we deduce from (4.16) that

$$\sup_{j=1,2 \ldots} \int_K |P_j\tilde{u}(se^{i\theta})|_{m+1}^2 \, s \, ds \, d\theta$$

exists. The sequence $\{|P_j \tilde{u}(\zeta)|_{m+1}^2\}_{j=1}^{\infty}$ being increasing, it

follows that

$$\lim_{j \to +\infty} |P_j \tilde{u}(\zeta)|^2_{m+1} < \infty \quad \text{a.e. on } K .$$

Thus

$$\tilde{u} \in X_{m+1,\mathbb{C}} \quad \text{and} \quad \lim_{j \to +\infty} |\tilde{u}(\zeta) - P_j \tilde{u}(\zeta)|_{m+1} = 0 , \tag{4.20}$$

for a.e. $\zeta \in K$ and consequently for a.e. $\zeta \in S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)^o$. From (4.18)-(4.19), we deduce that, for every $K \subset S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)^o$,

$$\int_K |\tilde{u}(se^{i\theta})|^2_{m+1} \, s \, ds \, d\theta \leqslant \text{constant depending on } \varepsilon, m, |u_o|_m, \nu, Q, |f|_{m-1,\infty} \tag{4.21}$$

and the Lebesgue theorem with (4.20)-(4.21) implies that $\{P_j \tilde{u}\}_{j=1}^{+\infty}$ converges in $L^2(K ; X_{m+1,\mathbb{C}})$ to $\tilde{u}$. Since the functions $P_j \tilde{u}$ are $X_{m-1,\mathbb{C}}$-analytic on $S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)^o$, then $\tilde{u}$ coincides a.e. on $S \cap \Delta_\varepsilon(u_o)^o$ with a $X_{m+1,\mathbb{C}}$-analytic function.

In particular, the function u, from which $\tilde{u}$ is an extension, is X_{m+1}-analytic on $(0, t_o(u_o)]$. ∎

Remark 4.1 We easily deduce from the Cauchy formula that the solution u, given by theorem 4.3, satisfies, for every $m \geqslant 1$

$$|u^{(k)}(t)|_{m+1} \leqslant \frac{(k+2)k! \, 4^{k+1}}{t^{k+1}} \sum_m \quad \forall \, t \in (0, t_o(u_o)] , \tag{4.22}$$

where $\sum_m$ is a constant depending on $\nu, Q, |f|_{m-1,\infty}$ and $|u_o|_m$.

Proof of (4.22). Let $k \geq 0$ and $m \geq 1$. We suppose for simplicity that $S \supset \Delta_{\frac{\pi}{6}}(u_0)^0$. Then, if $t \in (0, t_0(u_0))$, the disk $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - t| \leq \frac{t}{2}\}$ is contained in $\Delta_{\frac{\pi}{6}}(u_0)^0$. When then fix $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ and ζ_0 in the disk $\{|\zeta - t| \leq \frac{t}{4}\}$. By application of the Cauchy formula, we obtain, for $0 < s \leq \frac{t}{4}$

$$|\tilde{u}^{(k)}(\zeta_0)|_{m+1} \leq \frac{s^{-k-1}k!}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\zeta_0 + se^{i\theta})|_{m+1}\, s\, d\theta\right)$$

and, if K_0 denotes the disk $\{|\zeta_0 - \zeta| \leq \frac{t}{4}\}$,

$$|\tilde{u}^{(k)}(\zeta_0)|_{m+1} \leq \frac{(k+2)k!}{2\pi}\left(\frac{t}{4}\right)^{-k-2}\left(\int_{K_0} |\tilde{u}(se^{i\theta})|_{m+1}\, s\, ds\, d\theta\right)$$

$$\leq \text{(by Cauchy-Schwarz formula)}$$

$$\leq \frac{(k+2)k!}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{t}{4}\right)^{-k-1}\left(\int_{K_0} |\tilde{u}(se^{i\theta})|^2_{m+1}\, s\, ds\, d\theta\right)^{1/2}$$

By virtue of (4.21), we obtain that

$$|\tilde{u}^{(k)}(\zeta_0)|_{m+1} \leq \frac{(k+2)\,4^{k+1}k!}{t^{k+1}}\,\Sigma_m\,,$$

where the constant Σ_m depends on $\nu, Q, |f|_{m-1,\infty}$ and $|u_0|_m$. By setting $\zeta_0 = t$ we obtain (4.22). ∎

In particular, we obtain for $m = 1$

$$|u^{(k)}(t)|_2 \leq \frac{\sum_1'(k+2)k!\;4^{k+1}}{t^{k+1}}\,(1 + |u_0|_1^2)^{-1}\,, \tag{4.23}$$

where the constant $\sum_1'$ depends on $\nu, Q, |f|_{0,\infty}$. ∎

As a consequence of Theorem 4.3 we have the following result.

Theorem 4.4 *Let $u_o \in H$, $m \geq 1$ and f satisfying (4.2). Then the periodic Navier-Stokes equations (0.1)-(0.4) admit a weak solution which is X_{m+1}-analytic on an open set of $(0,\infty)$ whose complement has Haussdorff dimension $\leq 1/2$.*

Proof. Let $m \geq 1$.

(i) As in the proof of Theorem 2.3 we define, for any $p = 1, \ldots, m+1$, the sets $\mathcal{O}_p'$, Ω_p' and $\sum_p'$ by replacing in (2.7) " $u \in \mathcal{C}(]t-\varepsilon, t+\varepsilon[; X_p)$ " by " u is X_p-analytic on $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$ ". By Theorem 4.3, the set $\Omega_{m+1}' \setminus \sum_m'$ has Lebesgue measure 0 and we have

$$\sum_m' = \{t \in \mathbb{R}_+ , u(t) \notin X_m\} = \sum_m .$$

But, by (2.10), meas $\sum_m = 0$. Then $\sum_m$ has Lebesgue measure 0. Hence the solution u is X_{m+1}-analytic on an open set $\mathcal{O}_{m+1}'$ of $(0,\infty)$ whose complement has Lebesgue measure 0.

(ii) The argument concerning the Hausdorff dimension $\leq \frac{1}{2}$ is essentially due to J. Leray [9-10] (cf. also C. Foias-R. Temam [5], where the result for $m = 1$ is proved).

Let (α,β) be a X_{m+1}-analyticity interval, which is assumed to be maximal and bounded. Then, because of Theorem 4.3 ,

$$\beta - t \geq t_0(u(t)) \quad , \quad \forall\, t \in]\alpha,\beta[.$$

But, from (4.15) we deduce that there exists a constant σ_0 depending only on $\nu, Q, |f|_0$ such that

$$\beta - t \geqslant t_0(u(t)) \geqslant \sigma_0 \left(1 + |u(t)|_1^2\right)^{-2} .$$

Then

$$(4.24) \quad 1 + |u(t)|_1^2 \geqslant \left(\frac{\beta - t}{\sigma_0}\right)^{-1/2} \quad \forall\, t \in]\alpha,\beta[.$$

Integrating (4.24) over (t,β), we obtain

$$\int_t^\beta \left(1 + |u(\tau)|_1^2\right) d\tau \geqslant 2\, [(\beta-t)\sigma_0]^{1/2} , \quad \forall\, t \in]\alpha,\beta[$$

and, consequently ,

$$(4.25) \qquad \int_\alpha^\beta \left(1 + |u(\tau)|_1^2\right) d\tau \geqslant 2\, [(\beta-\alpha)\sigma_0]^{1/2}$$

for every X_{m+1}-analyticity interval (α,β), which is maximal and bounded.

Let now $T > 0$ and $J_i = (\alpha_i,\beta_i)$ $(i \in I_T)$ denote the analyticity intervals included in $(0,T)$. From (4.25) and the fact that $u \in L^2(0,T ; X_{m+1})$ we deduce that

$$\sum_{i\in I_T} (\beta_i - \alpha_i)^{1/2} \leqslant \int_0^T \left(1 + |u(\tau)|_1^2\right) d\tau < \infty .$$

The proof is completed as in [5].

REFERENCES

[1] R.A. Adams ,
Sobolev spaces ,
Academic Press, New York, 1975.

[2] C. Foias, G. Prodi ,
Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2 ,
Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 39 (1967), 1-34.

[3] C. Foias, R. Temam ,
Structure of the set of stationary solutions of the Navier-Stokes equations ,
Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977), 149-164.

[4] C. Foias, R. Temam ,
Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation ,
Annal. Sc. Norm. Sup, Pisa, Serie IV, 5 (1978), 29-63.

[5] C. Foias, R. Temam ,
Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations ,
J. Math Pures et Appl., 58, (1979), 339-368.

[6] E. Hille , R.S. Phillips ,
Functional analysis and semi-groups ,
A.M.S. Colloquium Publications, Providence, 1957.

[7] E. Hopf ,
Uber die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen ,
Math. Nachr., 4 (1951), 213-231.

[8] O.A. Ladyzenskaya ,
The mathematical theory of viscous incompressible flows ,
Gordon and Breach, New York,1963.

[9] J. Leray ,
Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois ,
J. Math. Pures et Appl., 13 (1934), 331-418.

[10] J. Leray ,
Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace ,
Acta Math., 63 (1934), 193-248.

[11] J.L. Lions, E. Magenes ,
Problèmes aux limites non homogènes et applications ,
Paris (vol. I, 1968 ; vol. II, 1968 ; vol. 3, 1969).

[12] J.L. Lions ,
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires ,
Paris, 1969.

[13] L. Tartar ,
Topics in nonlinear analysis ,
Publications Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, Orsay (1978).

[14] R. Temam ,
Navier-Stokes equations. Theory and Numerical Analysis ,
North-Holland, Amsterdam, New York, 2nd edition 1979.

[15] S. Kaniel - M. Shinbrot ,
Smoothness of weak solutions of the Navier-Stokes Equations ,
Arch. Rat. Mech. Anal., 24 (1967), 302-324.

DEUX NOUVELLES ESTIMATIONS A PRIORI DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES SUR UN DOMAINE BORNE DE $\mathbb{R}^3$

Nous noterons par $\mathcal{O}$, soit le cube $Q =]0,L[^3$, $L > 0$, dans le cas des équations de Navier-Stokes périodiques en espace, soit un domaine borné régulier Ω de $\mathbb{R}^3$, dans le cas des équations de Navier-Stokes sur Ω.

Considérons les équations de Navier-Stokes mises sous la forme d'une équation différentielle

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \nu\, Au + B(u,u) = f \\ \\ u(o) = u_o \end{cases}$$

Il a été montré en [1] que, si la donnée f est assez régulière, alors toute solution faible des équations de Navier-Stokes périodiques en espace (c'est-à-dire où $\mathcal{O} = Q$) vérifie des estimations a priori

$$(0.2) \qquad u \in L^{\alpha_m}(0,T; H^m(O)), \quad \int_o^T |u(t)|_m^{\alpha_m}\, dt \leq C_m(1+T)$$

pour tout $T > 0$; C_m est une constante dépendant seulement des données f, ν, u_o et $\alpha_m = 2/(2m-1)$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Nous considérons ici le cas des équations de Navier-Stokes sur le domaine Ω : nous conjecturons que les propriétés (0.2) sont aussi vraies, la suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ décroissant vers 0 quand m croît vers $+\infty$.

En fait, les propriétés (0.2) sont vérifiées dans les deux cas $\mathcal{O} = Q$ ou Ω pour $m = 1,2$ avec $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2/3$: la démonstration de ce résultat est celle donnée en [1], où, si $\mathcal{O} = \Omega$, nous avons noté

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{D}(\Omega)^3, \text{ div } u = 0\} ,$$

$$H = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega)^3 \quad (\text{norme } |.|) ,$$

$$V = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } \mathbb{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega)^3 \quad (\text{norme } \|.\|) ,$$

$$D(A) = V \cap \mathbb{H}^2(\Omega) = V \cap H^2(\Omega)^3 \quad (\text{norme } |A.|) ,$$

$$E_m = H \cap \mathbb{H}^m(\Omega) = H \cap H^m(\Omega)^3 \quad (\text{norme } |.|_m) .$$

En particulier, si f appartient à $L^\infty([o,+\infty);E_1)$, alors toute solution faible u de (0.1) vérifie, $\forall\ T > 0$

$$(0.3) \qquad u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \cap L^{2/3}(0,T;D(A)) .$$

Dans la suite, nous supposerons $\mathcal{O} = \Omega$. La démonstration de (0.2) donnée en [1] ne s'applique pas pour $m \geq 3$ car la fonction u et ses dérivées spatiales possèdent des valeurs au bord de Ω non triviales.

Cependant, utilisant le fait que les fonctions u_j, dérivées de u par rapport au temps, appartiennent à l'espace D(A), nous montrons que, sous l'hypothèse $f \in L^\infty(0,+\infty);E_3)$, toute solution faible u de (0.1) vérifie les propriétés (0.2) pour $m = 3,4$, précisémment :

$$(0.4) \qquad u \in L^{4/11}(0,T;E_3) \cap L^{8/37}(0,T;E_4) .$$

En fait, comparé à celui obtenu dans le cas des équations de Navier-Stokes périodiques en espace, le résultat (0.4) ne semble pas optimal.

Plan. 1. Deux lemmes techniques
2. Démonstration de la propriété (0.4)

1. Deux lemmes techniques

Lemme 1.1. Soient $T > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. Soient α_o et $\alpha_1 \in]0,+\infty]$. Toute fonction u de $L^{\alpha_o}(0,T; \mathbf{H}^m) \cap L^{\alpha_1}(0,T; \mathbf{H}^{m+1})$ appartient à l'espace $L^{\alpha}(0,T; \mathbf{H}^{m+\varepsilon})$, $\forall\, \varepsilon \in [0,1]$, où α est défini par

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{\alpha_1} + \frac{1-\varepsilon}{\alpha_o} .$$

Démonstration : Nous interpolons l'espace $\mathbf{H}^{m+\varepsilon}$ entre $\mathbf{H}^{m+1}$ et $\mathbf{H}^m$, et nous utilisons l'inégalité de Hölder dans les espaces L^{α}. □

Le passage de la propriété (0.2) d'ordre m à celle d'ordre $(m+1)$ se fait à l'aide du résultat suivant.

Lemme 1.2. Soient $T > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. Soient α_o, $\gamma \in]0,\infty]$ et $\beta \in [0,\infty[$ Toute fonction u de $L^{\alpha_o}(0,T; \mathbf{H}^m(\Omega))$ telle qu'il existe une fonction Ψ de $L^{\gamma}(0,T)$ vérifiant

$$\frac{|u|^2_{m+1}}{(1 + \Psi |u|^2_m)^{\beta}} \in L^1(0,T) \tag{1.1}$$

appartient à l'espace $L^{\alpha_1}(0,T; \mathbf{H}^{m+1})$, avec α_1 défini par

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\gamma} + \frac{\beta}{\alpha_o} .$$

Démonstration : C'est une application de l'inégalité de Hölder. Posons

$$k(t) = \frac{|u(t)|^2_{m+1}}{(1 + \Psi(t)\ |u(t)|^2_m)^{\beta}}, \quad \alpha_o = \frac{2}{\varepsilon_o}\ ,\ \alpha_1 = \frac{2}{\varepsilon_1}\ ,$$

Alors

$$\int_o^T |u(t)|_{m+1}^{\alpha_1} dt = \int_o^T [k(t)]^{1/\varepsilon_1} [1+\Psi(t)|u(t)|_m^2]^{\beta/\varepsilon_1} dt$$

$$\leq [\int_o^T k(t)dt]^{1/\varepsilon_1} [\int_o^T (1+\Psi(t)|u(t)|_m^2)^{\frac{\beta}{\varepsilon_1-1}} dt]^{1-\frac{1}{\varepsilon_1}}$$

Or, d'après l'hypothèse sur Ψ, la fonction $\Psi \| u \|_m^2$ appartient à $L^r(0,T)$ avec $1/r = \varepsilon_o + 1/\gamma$. Donc ε_1 est donné par la relation

$$\frac{\varepsilon_1 - 1}{\beta} = \varepsilon_o + \frac{1}{\gamma} ,$$

soit $\varepsilon_1 = 1 + \beta\varepsilon_o + \beta/\gamma$ □

Remarque 1.3. Il a été montré en [1, §.3.2] que, si u vérifie une inégalité de la forme

$$\frac{d}{dt} |u(t)|_m^2 + \nu|u(t)|_{m+1}^2 \leq \varphi(t) (1+|u(t)|_m^2)^{\beta} \tag{1.2}$$

où $\beta > 0$ et $\varphi \in L^1(0,T)$, alors u vérifie la propriété (1.1), où $\Psi \equiv 1$ ($\in L^\infty(0,T)$). □

2. Démonstration de la propriété (0,4)

Cette démonstration se fait en étudiant la fonction $u'(=u_1)$; u' vérifie les équations

$$u' + \nu Au = f - B(u,u), \tag{2.1}$$

$$\frac{du'}{dt} + \nu Au' = f' - B(u',u) - B(u,u') . \tag{2.2}$$

Dans la suite, les c_i désigneront des constantes indépendantes de u. Nous distinguerons plusieurs étapes.

Lemme 2.1. La fonction u' vérifie

$$u' \in L^4(0,T;(D(A))') \cap L^{4/3}(0,T;V') \cap L^{2/3}(0,T;H) \quad . \tag{2.3}$$

Démonstration. Soit m=0,1 ou 2. Utilisant le fait que

$$\| Au \|_{V'} = \| u \| \underset{\text{déf}}{=} |u|_1 \ ,$$

$$\| Au \|_{(D(A))'} \leq |u| \underset{\text{déf}}{=} |u|_0 \ ;$$

nous déduisons de (2.1) que

$$|u'|_{m-2} \leq \nu |u|_m + |f-B(u,u)|_{m-2} \ . \tag{2.4}$$

Des propriétés de continuité de B, nous déduisons

$$|B(u,u)|_{m-2} \leq c_m \, |u|^2_{\frac{2m+1}{4}} \ . \tag{2.5}$$

Puis, du Lemme 1.1 et de la propriété (0.3), nous déduisons que

$$u \in L^{\alpha_m}(0,T; \mathbb{H}^{\frac{2m+1}{4}}) \ , \tag{2.6}$$

avec

$$\frac{1}{\alpha_m} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{2m+1}{4} + \frac{1}{\infty} \cdot \frac{3-2m}{4} = \frac{2m+1}{8} \ , \text{ si } m=0,1, \\ \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{2m-3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7-2m}{4} = \frac{2m-1}{8} \ , \text{ si } m=2 \ . \end{cases}$$

Utilisant dans (2.4), les propriétés (0.3) et (2.5)-(2.6) nous déduisons le résultat. □

Lemme 2.2. La fonction u' appartient à $L^{4/11}(0,T;V)$.

Démonstration. Multiplions l'équation (2.2) par u' dans H :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'|^2 + \nu \|u'\|^2 = (f' - B(u',u), u')$$

où, d'après les propriétés de continuité de B,

$$\|B(u',u)\|_{V'} \leq c_1 \|u\| \; |u'|^{1/2} \; \|u'\|^{1/2}.$$

Donc, la fonction u' vérifie l'inégalité différentielle :

$$\frac{d}{dt}|u'|^2 + \nu \|u'\|^2 \leq c_2(1 + \|u\|^2)(1 + \|u\|^2 \; |u'|^2) \tag{2.7}$$

où $u \in L^2(0,T;V)$ et $u' \in L^{2/3}(0,T;H)$.

Or, multipliant l'équation (2.1) par u dans H, nous obtenons

$$\nu \|u\|^2 = (f - u',u)$$

soit, comme $u \in L^\infty(0,T;H)$,

$$\|u\|^2 \leq C_0(1 + |u'|). \tag{2.8}$$

De (2.7) et (2.8), nous déduisons que $|u'|^2$ vérifie une inégalité différentielle du type (1.2),

$$\frac{d}{dt}|u'|^2 + \nu \|u'\|^2 \leq C_3(1 + \|u\|^2)(1 + |u'|^2)^{3/2}, \tag{2.9}$$

ce qui d'après le Lemme 1.2 et $u' \in L^{2/3}(0,T;H)$ implique que la fonction u' appartient à $L^\alpha(0,T;V)$ avec

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2.\infty} + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{11}{4} \qquad \square$$

Remarque 2.3. La relation (2.8) s'écrit aussi

$$\| u \| \leq \phi \ ,$$

où $\| u \| \in L^2(0,T)$, tandis que $\phi \in L^{4/3}(0,T)$: cela mesure la perte de régularité obtenue en passant de l'inégalité (2.7) à l'inégalité (2.9). □

Lemme 2.4. La fonction u' appartient à $L^{8/37}(0,T;D(A))$.

Démonstration. Nous multiplions l'équation (2.2) par Au' dans H :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'\|^2 + \nu \ |Au|^2 \leq (f - B(u',u) - B(u,u'), Au') \ .$$

Or,

$$|B(u',u) + B(u,u')| \leq C_1 \ \| u \| \ \| u' \|^{1/2} \ |Au'|^{1/2} .$$

Donc u' vérifie l'inégalité différentielle :

$$\frac{d}{dt} \|u'\|^2 + \nu \ |Au|^2 \leq C_2 \ (1 + \| u \|^2)(1 + \| u \|^2 \ \| u' \|^2)$$

avec $u \in L^2(0,T,V)$ et $u' \in L^{11/4}(0,T;V)$. Donc, d'après l'inégalité (2.8), $\| u' \|^2$ vérifie une inégalité différentielle du type (1.2) :

$$\frac{d}{dt} \|u'\|^2 + \nu|Au|^2 \leq C_3(1 + \| u \|^2)(1 + \| u' \|^2)^{3/2} \ ,$$

ce qui d'après le Lemme 1.2 et $u' \in L^{4/11}(0,T,V)$ implique que la fonction u' appartient à $L^{\alpha}(0,T;D(A))$ avec

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{4} = \frac{37}{8} \ . \qquad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure de déduire des estimations pour la fonction u.

Théorème 2.5. Toute solution faible des équations de Navier-Stokes vérifie

$$u \in L^{4/11}(0,T;\, H^3(\Omega)) \cap L^{8/37}(0,T;\, H^4(\Omega)) \ .$$

Démonstration. De l'équation (2.1), nous déduisons que pour $m=1,2$,

$$\nu |u|_{m+2} \le |f-B(u)|_m + |u'|_m \ .$$

(i) D'après les propriétés de continuité de B :

$$\| B(u) \| \le C_o \| u \|^{1/2} \ |Au|^{3/2} \ . \tag{2.11}$$

Donc $B(u) \in L^{2/5}(0,T;V)$, ce qui avec $u' \in L^{4/11}(0,T;H)$ montre la première partie du théorème .

(ii) D'après les propriétés de continuité de B :

$$|AB(u)| \le C_1 \| u \|^{1/2} \ |Au|^{1/2} \ |u|_3 \ . \tag{2.12}$$

et donc $B(u) \in L^{4/15}(0,T;D(A))$, ce qui avec $u' \in L^{8/37}(0,T;V)$ montre le théorème. □

Remarque 2.6. Nous avons montré en [1] que toute solution faible des équations de Navier-Stokes périodiques en espace vérifie

$$u \in L^{2/5}(0,T;\, H^3(Q)) \cap L^{2/7}(0,T;\, H^4(Q)) .$$

La méthode utilisée ici entraîne une très nette dégradation de la régularité obtenue. Cela explique, en particulier, les difficultés rencontrées pour mettre en oeuvre cette méthode dans les espaces H^m, $m \ge 5$. □

Bibliographie

[1] C. Foias, C. Guillopé, R. Temam,
New a priori estimates for Navier-Stokes equations,
Comm. Part. Diff. Eq. 6 (1981), 329-359.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 3 (1982), 1-37

COMPORTEMENT À L'INFINI DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET PROPRIÉTÉ DES ENSEMBLES FONCTIONNELS INVARIANTS (OU ATTRACTEURS)

par Colette GUILLOPE

Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons au comportement à l'infini d'une solution forte, définie sur $(t_0, +\infty)$, des équations de Navier-Stokes dans un ouvert borné régulier Ω de $\mathbf{R}^N$, $N = 2$ ou 3 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^{N} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = f \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, +\infty), \tag{0.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, +\infty), \tag{0.2}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{0.3}$$

$$u(x, t) = 0 \quad \forall (x, t), \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0, +\infty); \tag{0.4}$$

$\nu > 0$, u_0 et $f = f(t)$ sont données, les inconnues sont la vitesse $u = (u_i)_{i=1}^N$ et la pression p et sont définies presque partout sur $\Omega \times [0, +\infty)$.

Soient t_0 et t_1 deux réels vérifiant $0 \leqslant t_0 < t_1$, t_1 pouvant éventuellement être égal à $+\infty$. Nous savons que toute solution u de (0.1)-(0.4) définie sur l'intervalle de temps (t_0, t_1), i.e. vérifiant $u \in \mathcal{C}((t_0, t_1); \mathrm{H}^1(\Omega)^N)$, est sur (t_0, t_1) aussi régulière que la force f le permet (cf. O.A. Ladyzhenskaya [4]).

Nous étudions ici le comportement à l'infini d'une solution forte, définie sur l'intervalle semi-infini $(t_0, +\infty)$ et continue à valeurs dans l'espace $\mathrm{H}^m(\Omega)^N$, $m \geqslant 1$ fixé. Nous montrons qu'une telle solution,

supposée en outre bornée dans l'espace $H^1(\Omega)^N$, est aussi bornée dans l'espace $H^m(\Omega)^N$, c'est-à-dire appartient à $L^\infty(\eta, +\infty ; H^m(\Omega)^N)$, $\forall \eta > t_0$; de plus, la norme de u dans cet espace est majorée par une constante ne dépendant que des données, de t_0 et de η. Une propriété analogue est vérifiée par les dérivées de la fonction u par rapport au temps (cf. Théorème 2.1).

Nous précisons ce résultat dans le cas où $f \equiv 0$. En effet, nous savons que toute solution u de (0.1)-(0.4) est alors bornée de $(t_0, +\infty)$ dans $H^1(\Omega)^N$, pour t_0 assez grand, et que $u(t)$ converge vers 0 dans $H^1(\Omega)^N$ quand $t \longrightarrow +\infty$. (cf. J. Leray [7], R. Temam [11]). Nous montrons ici que la norme de $\dfrac{d^j u(t)}{dt^j}$ dans $H^m(\Omega)^N$ tend vers 0 de façon exponentielle quand $t \longrightarrow +\infty$, pour tout $j \geqslant 0$, pour tout $m \geqslant 0$. (cf. Théorème 2.2).

Par ailleurs, de la propriété de bornitude montrée au Théorème 2.1, nous déduisons une propriété de régularité des ensembles fonctionnels invariants (ou attracteurs) pour les équations de Navier-Stokes. La donnée f est supposée indépendante du temps. Nous savons que tout ensemble fonctionnel invariant, borné dans $H^1(\Omega)^N$, est de dimension de Hausdorff finie (cf. C. Foias – R. Temam [4]). Nous montrons ici qu'un tel ensemble fonctionnel est en fait constitué de fonctions aussi régulières que la donnée f le permet (cf. Théorème 2.3). En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, tout ensemble attracteur, borné dans $H^1(\Omega)^N$, est constitué de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette propriété généralise les propriétés de régularité de l'ensemble des solutions stationnaires ou périodiques des équations de Navier-Stokes.

Dans un premier paragraphe, nous rappelons quelques propriétés des solutions des équations de Navier-Stokes. Les résultats obtenus sont énoncés dans le deuxième paragraphe. Le troisième paragraphe est consacré à l'étude de la régularité et de la propriété de bornitude des solutions des équations de Navier-Stokes sur l'intervalle de temps semi-infini $(t_0, +\infty)$. Le quatrième paragraphe est consacré à l'étude du cas $f \equiv 0$.

PLAN

1) Préliminaires.
2) Enoncé des principaux résultats.
3) Estimations des dérivées par rapport au temps d'une solution forte.
4) Etude du cas où la force est nulle.

1. PRELIMINAIRES

Nous utilisons ici la présentation des équations de Navier-Stokes décrite par R. Temam en [11] et en [12].

1.1. Notations.

Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbf{R}^N$, $N = 2, 3$, de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que Ω soit situé localement d'un seul côté de Γ.

Nous notons $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbf{R}$, l'espace de Sobolev construit sur $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega)^N$, $\mathbf{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega)^N$.

Soient $\mathcal{V} = \{v \mid v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^N, \operatorname{div} u = 0\}$,

H : adhérence de $\mathcal{V}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$,

V : adhérence de $\mathcal{V}$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$,

V' : dual de V,

$E_m = \mathbf{H}^m(\Omega) \cap H$, $m \geqslant 0$.

Les produits scalaires sur H et V sont notés $(.,.)$ et $((.,.))$, et les normes sur H, V, V', E_m sont notées $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ et $|\cdot|_m$.

Soit A l'opérateur de Stokes défini comme un isomorphisme de V dans V' par $\langle Au, v\rangle_{V',V} = ((u, v))$, $\forall v \in V$, et prolongé à H comme opérateur non borné de domaine $D(A) = V \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. L'opérateur A^{-1}, autoadjoint, compact de H, admet une suite de vecteurs propres, formant une base orthonormale de H, soit

$$Aw_m = \lambda_m w_m, \quad w_m \in D(A), \quad \text{où} \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$$

Les espaces $V_m = D(A^{m/2})$, $m \in \mathbf{R}$, munis de la norme $|A^{m/2}\cdot|$ sont hilbertiens et s'injectent de façon continue dans E_m, pour

$m \in \mathbb{N}$; de plus, la restriction à V_m de la norme $|\cdot|_m$ est équivalente à la norme de V_m .

Soit b la forme trilinéaire continue, définie par

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j,k=1}^{N} \int_\Omega u_j D_j v_k w_k \, dx , \quad \forall (u, v, w) \in V \times V \times V .$$

Nous notons B la forme bilinéaire, définie pour $(u, v) \in V \times V$ par

$$\langle B(u, v), w \rangle_{V',V} = b(u, v, w) , \quad \forall w \in V ,$$

et nous notons $B(u) = B(u, u)$.

Les propriétés de b et B sont les suivantes :

$$b \text{ est continue sur } H^{s_1}(\Omega) \times H^{s_2+1}(\Omega) \times H^{s_3}(\Omega) , \tag{1.1}$$

où $s_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, et $\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 > \dfrac{N}{2} \text{ si deux des } s_i \text{ sont nuls,} \\ \geqslant \dfrac{N}{2} \text{ sinon ;} \end{cases}$

$$B \text{ est continue de } E_{m+1} \times E_{m+1} \text{ dans } E_m , \text{ pour tout } m \geqslant 1 , \tag{1.2}$$

$B : V \times V \longrightarrow H$ est continue sur tout borné de $D(A) \times D(A)$. (cf. par exemple, C. Foias – R. Temam [4], R. Temam [13]). (1.3)

1.2. Présentation du problème.

Dans la suite, les données ν , u_0 , f vérifieront $\nu > 0$,

$$u_0 \in H , \tag{1.4}$$

$$f \in L^\infty(0, +\infty ; V') , \tag{1.5}$$

ou

$$f \in L^\infty(0, +\infty ; E_m) , \quad \text{pour un certain} \quad m \geqslant 0 . \tag{1.6}$$

Le système (0.1)-(0.4) s'écrit alors sous la forme d'une équation différentielle dans V'

$$u' + \nu A u + B(u) = f , \tag{1.7}$$

$$u(0) = u_0 , \tag{1.8}$$

où u' désigne la dérivée (au sens des distributions) de la fonction u par rapport au temps.

Sous les hypothèses (1.4)-(1.5), le problème (1.6)-(1.7) admet (au moins) une solution vérifiant

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}_b([0,+\infty);H_{\text{faible}}) \cap L^2_{\text{loc}}(0,+\infty;V)^{(1)}, \\ \dfrac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 \leqslant 2\langle f(t),u(t)\rangle, \quad \text{p.p. } t \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

(cf. par exemple J. Leray [7], R. Temam [11]).

Une solution vérifiant (1.9) sera dite *solution faible.*

Par ailleurs, sous les hypothèses (1.4) et (1.6) avec $m = 0$, toute solution faible vérifie

$$\begin{cases} u \in L^{2/3}_{\text{loc}}(0,+\infty;D(A)), \\ \dfrac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu|Au(t)|^2 \leqslant \dfrac{c_1}{\nu^3}\|u(t)\|^6 + \dfrac{2}{\nu}|f(t)|^2, \quad \text{p.p. } t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

si $N = 3$, et

$$\begin{cases} u \in L^1_{\text{loc}}(0,+\infty;D(A)), \\ \dfrac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu|Au(t)|^2 \leqslant \dfrac{c_2}{\nu^3}|u(t)|^2\|u(t)\|^4 + \dfrac{2}{\nu}|f(t)|^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{p.p. } t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

si $N = 2$. Ci-dessus, les constantes c_1 et c_2 sont des constantes géométriques (i.e. ne dépendant que de Ω) (cf. [1]).

Une solution u de (1.7)-(1.8) sera dite *solution forte* sur l'intervalle (t_1, t_2) si u appartient à $\mathcal{C}([t_1,t_2];V)$; la solution est alors unique sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Exemples de solutions fortes (cf. [2] [3] [6] [7] [11] [12]).

Exemple 1.1. – Si $N = 2$, le problème (1.7)-(1.8) admet une unique solution forte définie sur $[\eta, +\infty[$, $\forall \eta > 0$ (cf. aussi Remarque 1.7).

Exemple 1.2. – Si $N = 3$ et $u_0 \in V$, il existe un réel $t(u_0)$, dépendant de Ω, ν, u_0 et f, tel que le problème (1.7)-(1.8) admette une unique solution forte sur $[0,t]$, $\forall t$, $0 \leqslant t < t(u_0)$.

(1) $\mathcal{C}_b(0,+\infty;H_{\text{faible}})$ désigne l'espace des fonctions de $L^\infty(0,+\infty;H)$ qui sont faiblement continues de $[0,+\infty[$ dans H.

Exemple 1.3. – Si $N = 3$, si f est assez régulier, si f, u_0, ν vérifient une certaine condition (i.e. ν assez grand, ou f et u_0 assez petits), il existe un réel $t_0 > 0$, dépendant de ν, Ω, u_0 et f, tel que la solution de (1.7)-(1.8) soit forte sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$. (cf. § 4 pour le cas particulier $f = 0$).

Dans la suite de ce travail, nous nous intéressons *au comportement à l'infini des solutions fortes définies sur* $[t_0, +\infty[$, $t_0 \geqslant 0$. Pour cela, nous définissons et étudions quelques espaces de fonctions définies sur $[t_0, +\infty[$ à valeurs dans un espace de Banach X.

1.3. Espaces de fonctions de $[t_0, +\infty[$ à valeurs dans X.

Soit η un réel $\geqslant 0$. Soit X un espace de Banach.

Nous notons $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; X)$ l'espace des fonctions de $L^\infty(\eta, +\infty; X)$ qui sont continues et bornées de $[\eta, +\infty[$ dans X. Si u appartient à $L^\infty(\eta, +\infty; X)$ ou à $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; X)$, nous notons

$$|u|_{X,\infty} = \operatorname*{Sup}_{t \geqslant \eta} |u(t)|_X .$$

Si X est l'un des espaces V', H ou E_m, nous notons cette norme par $|\cdot|_{-1,\infty}$, $|\cdot|_{0,\infty}$ ou $|\cdot|_{m,\infty}$.

Nous notons $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$ l'espace des fonctions u de $L^2_{loc}(\eta, +\infty; X)$ telles que, pour tout $\alpha \geqslant 0$,

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant \alpha + \eta} \int_{t-\alpha}^{t} |u(s)|_X^2 \, ds \leqslant c(\alpha)$$

où $c(\alpha)$ est un réel dépendant de α et de la fonction u.

Si u appartient à $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$, nous notons

$$[u]_{X,\alpha} = \left[\operatorname*{Sup}_{t \geqslant \alpha + \eta} \int_{t-\alpha}^{t} |u(s)|_X^2 \, ds \right]^{1/2} . \tag{1.12}$$

Nous noterons $[u]_{R,\alpha}$ par $[u]_\alpha$.

L'espace $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$ possède les propriétés suivantes, faciles à vérifier :

i) L'application $u \longrightarrow [u]_{X,\alpha}$ est une norme sur $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$, pour tout $\alpha > 0$. Toutes les normes $[\cdot]_{X,\alpha}$, $\alpha > 0$, sont équivalentes. L'application $\alpha \longrightarrow [\cdot]_{X,\alpha}$ est croissante.

ii) L'espace $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$, muni d'une quelconque norme $[\cdot]_{X,\alpha}$ $(\alpha > 0)$, est un espace de Banach.

iii) L'espace $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$ vérifie la suite d'inclusions

$$L^\infty(\eta, +\infty; X) \subset \mathcal{E}(\eta, +\infty; X) \subset L^2_{loc}(\eta, +\infty; X).$$

Exemple 1.4. – De l'inégalité (1.9), nous déduisons que, si $f \in L^\infty(0, +\infty; V')$, toute solution faible u des équations de Navier-Stokes vérifie $u \in \mathcal{C}_b(0, +\infty; H_{\text{faible}}) \cap \mathcal{E}(0, +\infty; V)$,

avec
$$|u|^2_{0,\infty} \leqslant |u_0|^2 + \frac{1}{\nu^2 \lambda_1} |f|^2_{-1,\infty},$$

$$[u]^2_{V,\alpha} \leqslant \frac{|u_0|^2}{\nu} + \frac{|f|^2_{-1,\infty}}{\nu^2}\left[\frac{1}{\nu\lambda_1} + \alpha\right].$$

LEMME 1.5. – *Soit* $\phi : [\eta, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction positive absolument continue* $(\eta \geqslant 0)$ *vérifiant*

$$\sqrt{\phi} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; \mathbf{R}), \tag{1.13}$$

$$\phi'(t) \leqslant \sigma(t)(1 + \phi(t)), \quad \text{p.p. } t \geqslant \eta, \tag{1.14}$$

où σ *est une fonction positive presque partout sur* $(\eta, +\infty)$ *telle que* $\sqrt{\sigma} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; \mathbf{R})$.

Alors, la fonction ϕ *appartient à* $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; \mathbf{R})$. *Plus précisément, il existe une constante* $c(\alpha)$, *dépendant en outre de* σ *et* η, *telle que*

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant \eta} (1 + \phi(t)) \leqslant c(\alpha)\left[1 + \operatorname{Max}\left(\phi(\eta), \frac{[\sqrt{\phi}]^2_{\alpha-\eta}}{\alpha - \eta}\right)\right], \qquad \alpha > \eta. \tag{1.15}$$

Démonstration. – Soit $\alpha > \eta$.

De l'inégalité (1.14), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}\left[(1 + \phi(t)) \exp\left(-\int_s^t \sigma(\tau)\, d\tau\right)\right] \leqslant 0, \quad \text{p.p. } s, t \geqslant \eta,$$

puis en intégrant par rapport à $t \geqslant s$,

$$(1 + \phi(t)) \exp\left(-\int_s^t \sigma(\tau)\, d\tau\right) \leqslant 1 + \phi(s), \quad \forall s, t, \ \eta \leqslant s \leqslant t. \tag{1.16}$$

En particulier, pour $t \in [\eta, \alpha]$, nous obtenons

$$\sup_{\eta \leq t \leq \alpha} (1 + \phi(t)) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha-\eta}) (1 + \phi(\eta)) \qquad (1.17)$$

en utilisant l'hypothèse sur σ.

Soit maintenant $t \geq \alpha$ et $s \in (t - \alpha + \eta, t)$.

Nous avons donc $t - s \leq \eta - \alpha$: de l'hypothèse vérifiée par σ et de la croissance de l'application $\alpha \longrightarrow [\cdot]_\alpha$, nous déduisons que (1.16) implique

$$1 + \phi(t) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha-\eta}) (1 + \phi(s)) .$$

Nous intégrons cette inégalité par rapport à $s \in (t - \alpha + \eta, t)$ et nous obtenons, d'après (1.13) :

$$(\alpha - \eta) (1 + \phi(t)) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha-\eta}) ((\alpha - \eta) + [\sqrt{\phi}]^2_{\alpha-\eta}) ,$$

soit

$$\sup_{t \geq \alpha} (1 + \phi(t)) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha-\eta}) \left[1 + \frac{[\sqrt{\phi}]^2_{\alpha-\eta}}{\alpha - \eta}\right] . \qquad (1.18)$$

De (1.17)-(1.18), nous déduisons que

$$\sup_{t \geq \eta} (1 + \phi(t)) \leq \exp([\sqrt{\sigma}]^2_{\alpha-\eta}) \left[1 + \mathrm{Max}\left(\phi(\eta), \frac{[\sqrt{\phi}]^2_{\alpha-\eta}}{\alpha - \eta}\right)\right] ,$$
$$\forall \alpha > \eta .$$

Remarque 1.6. – Si $\sigma(t) = \sigma$ est une constante, le Lemme s'applique : sous les hypothèses (1.13)-(1.14), ϕ vérifie l'inégalité (1.15) avec $c_\alpha = \exp[\sigma(\alpha - \eta)]$.

Remarque 1.7. – Nous déduisons du Lemme 1.5 le résultat suivant, dû à C. Foias et G. Prodi [4] :

En dimension d'espace $N = 2$, *si la donnée* f *appartient à* $L^\infty(0, +\infty; H)$ *et* $u_0 \in H$, *alors la solution* u *du problème de Navier-Stokes correspondant appartient à* $L^\infty(t_0, +\infty; V)$, $\forall t_0 > 0$, *et la norme de* u *dans cet espace est majorée par une constante ne dépendant que des données* ν, Ω, u_0, f *et de* t_0.

En effet, nous avons les inégalités (cf. (1.9) et (1.11))

$$|u(t)| \leq |u_0| e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|f|_{0,\infty}}{\nu\lambda_1} (1 - e^{-\nu\lambda_1 t}), \quad \forall t \geq 0 , \qquad (1.19)$$

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant \alpha} \left(\int_{t-\alpha}^{t} \|u(s)\|^2 \, ds \right) \leqslant \frac{d}{\nu} \left(\frac{d}{2} + \alpha \right), \tag{1.20}$$

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \nu \, |Au(t)|^2 \leqslant d_1 (1 + \|u(t)\|^2)^2 , \quad \text{p.p. } t \geqslant 0 , \tag{1.21}$$

où
$$\begin{cases} d = \operatorname{Max} \left(|u_0| , \dfrac{|f|_{0,\infty}}{\nu \lambda_1} \right) , \\ d_1 = \operatorname{Max} \left(\dfrac{2}{\nu} \, |f|_{0,\infty}^2 , \dfrac{c_2}{\nu^3} \, d^2 \right) \leqslant d^2 \operatorname{Max} \left(2\nu\lambda_1^2 , \dfrac{c_2}{\nu^3} \right) , \end{cases}$$

et c_2 est une constante géométrique (i.e. ne dépendant que de Ω).

Soit $t_0 > 0$. En raisonnant par l'absurde, nous montrons que l'inégalité (1.20) implique l'existence de $\eta \in \left(\frac{t_0}{2} , t_0 \right)$ tel que

$$u(\eta) \in V , \quad \|u(\eta)\|^2 \leqslant \frac{d}{\nu} \left(\frac{d}{t_0} + 1 \right) . \tag{1.22}$$

Puis nous appliquons le Lemme à la fonction $t \longrightarrow \phi(t) = \|u(t)\|^2$ définie, absolument continue[2] sur $[\eta , + \infty)$.

Nous obtenons donc

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant t_0} (1 + \|u(t)\|^2) \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \geqslant \eta} (1 + \|u(t)\|^2) \leqslant c_\eta \left[1 + \frac{d}{\nu} \left(\frac{d}{t_0} + 1 \right) \right]$$

avec

$$c_\eta = \exp \left[\frac{d_1}{2} \left(\left(1 + \frac{d}{\nu} \right) t_0 + \frac{d^2}{\nu} \right) \right] . \qquad \square$$

2. ENONCE DES PRINCIPAUX RESULTATS

Nous énonçons d'abord le résultat de régularité concernant toute solution forte bornée dans V. Puis nous donnons des compléments dans le cas particulier où $f = 0$. Enfin, nous donnons une application

(2) Les inégalités (1.19)-(1.22) sont, en fait, démontrées pour les approximées de Galerkin $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de la fonction u puis le Lemme 1.5 est appliqué à la fonction $t \longrightarrow \phi_n(t) = \|u_n(t)\|^2$. Nous obtenons alors le résultat pour u en passant à la limite $(n \longrightarrow + \infty)$.

de ce résultat concernant les ensembles fonctionnels invariants (en particulier les ensembles attracteurs).

2.1. Comportement asymptotique des solutions fortes.

THEOREME 2.1. – Soit $N = 2$ ou 3. *Supposons que les données vérifient*

$$u_0 \in H , \tag{2.1}$$

$$f^{(j)} \in \mathcal{C}_b(0, +\infty ; E_{m-2j}) , \quad j = 0, \ldots , \ell - 1 , \tag{2.2}$$

$$f^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(0, +\infty ; V_{m-2\ell-1})^{(3)} , \tag{2.3}$$

où m *est un entier* $\geqslant 0$ *et* $\ell = \left[\frac{m}{2}\right]$.

Alors, toute solution du problème (1.7)-(1.8) vérifiant

$$u \in L^\infty(t_0, +\infty ; V) , \quad t_0 \geqslant 0 \text{ fixé} , \tag{2.4}$$

vérifie

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; E_{m-2j}) , \quad j = 0, \ldots , \ell , \quad \forall \eta > t_0 , \tag{2.5}$$

et la norme de $u^{(j)}$ *dans cet espace est majorée par une constante ne dépendant que des données de* t_0 , η *et* $|u|_{L^\infty(t_0, \infty ; V)}$.

Dans le cas de la dimension $N = 2$, l'hypothèse (2.4) est vérifiée pour tout $t_0 > 0$ (et même $t_0 = 0$ si $u_0 \in V$) (cf. Remarque 1.7). Par contre, dans le cas de la dimension $N = 3$, la propriété (2.4) n'est nullement automatique, mais nous notons au passage la Proposition suivante qui permet d'affaiblir un peu la condition (2.4) :

PROPOSITION 2.3. – *Soit* $N = 3$. *Supposons que*

$$u_0 \in H , \quad f \in L^\infty(0, +\infty ; H) .$$

Alors, toute solution du problème (1.7)-(1.8) vérifiant

$$u \in L^\infty(0, +\infty ; H^{1/2+\epsilon}) , \quad \epsilon \text{ fixé} , \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{2} ,$$

vérifie

$$u \in L^\infty(t_0, +\infty ; V) , \quad \forall t_0 > 0 ,$$

(3) $V_{m-2\ell-1} = V'$ si $m = 2\ell$, $= H$ si $m = 2\ell + 1$.

et la norme de u *dans* $L^\infty(t_0, +\infty; V)$ *est majorée par une constante ne dépendant que des données, de* t_0 *et de* $|u|_{L^\infty(0,+\infty;H^{1/2+\epsilon})}$.

Démonstration. – Soit ϵ, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, et supposons que $u \in L^\infty(0, +\infty; H^{1/2+\epsilon})$.

i) *Une estimation a priori.* Utilisant la propriété (1.1) avec $s_1 = \frac{1}{2} + \epsilon$, $s_2 = 1 - \epsilon$, $s_3 = 0$, nous obtenons

$$|b(u(t), u(t), Au(t))| \leqslant c_0(\epsilon)\, |u(t)|_{\frac{1}{2}+\epsilon}\, |u(t)|_{2-\epsilon}\, |Au(t)|$$
$$\leqslant c_1(\epsilon)\, |u(t)|_{\frac{1}{2}+\epsilon}\, |u(t)|^{\epsilon/2}\, |Au(t)|^{2-\epsilon/2}.$$

Puis, en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons au lieu de (1.10),

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\, |Au(t)|^2 \leqslant \frac{c_2(\epsilon)}{\nu^{4/\epsilon-1}} |u(t)|^2\, |u(t)|^{4/\epsilon}_{1/2+\epsilon} + \frac{2}{\nu}\, |f(t)|^2, \quad \text{p.p. } t \geqslant 0$$

où $c_2(\epsilon)$ est une constante géométrique. Comme $u \in L^\infty(0, +\infty; H)$, il existe une constante $c(\epsilon)$ dépendant de Ω, ν, f et u telle que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\, |Au(t)|^2 \leqslant c(\epsilon)\,(1 + |u(t)|^{4/\epsilon}_{1/2+\epsilon}), \quad \text{p.p. } t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

ii) Soit $t_0 > 0$. Les propriétés (1.19)-(1.20) sont vraies pour $N = 2$ ou 3. Soit donc $\eta \in \left(\frac{t_0}{2}, t_0\right)$ défini par (1.22).

Utilisant dans (2.6) l'inégalité

$$|Av|^2 \geqslant \lambda_1 \|v\|^2, \quad \forall v \in D(A),$$

et intégrant sur (η, t), nous obtenons

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant t_0} (\|u(t)\|^2) \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \geqslant \eta} (\|u(t)\|^2) \leqslant \|u(\eta)\|^2 + \frac{c(\epsilon)}{\nu\lambda_1}\,(1 + |u|^{4/\epsilon}_{1/2+\epsilon,+\infty}),$$

soit, d'après (1.22)

$$\operatorname*{Sup}_{t \geqslant t_0} (\|u(t)\|^2) \leqslant \frac{d}{\nu}\left(\frac{d}{t_0} + 1\right) + \frac{c(\epsilon)}{\nu\lambda_1}\,(1 + |u|^{4/\epsilon}_{1/2+\epsilon,+\infty}). \qquad \square$$

Remarque 2.2. – Nous ne faisons aucune hypothèse de régularité au point t_0 (cf. R. Temam [13]). Nous obtenons donc un résultat de régularité seulement sur les intervalles $[\eta, +\infty[$, $\eta > t_0$. □

La démonstration du théorème 2.1. est l'objet du § 3.

2.2. Cas particulier : $f \equiv 0$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons

$$u_0 \in H , \quad f \equiv 0 . \tag{2.7}$$

Il a été montré par J. Leray [7] l'existence d'un réel $t_0 > 0$, dépendant des données ν, Ω, u_0, tel que toute solution u des équations de Navier-Stokes associées à (2.7) vérifie $u \in L^\infty(t_0, +\infty; V)$. Donc, du Théorème 2.1., nous déduisons que

$$u \in \mathcal{C}_b^\infty(\eta, +\infty; \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})) \quad \forall \eta > t_0 ; \tag{2.8}$$

la propriété (2.8) signifie que les fonctions $u^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots$, sont bornées de $[\eta, +\infty[$ dans E_m , $\forall m \geqslant 0$; de plus, la norme de $u^{(j)}$ dans $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_m)$ est majorée par une constante dépendant de ν, Ω, u_0 et η .

Par ailleurs, nous montrons que, lorsque $t \longrightarrow +\infty$, le fluide tend vers l'état d'équilibre de façon très régulière (cf. aussi J.G. Heywood [14], R. Temam [11]).

THEOREME 2.3. – *Soit* $N = 2$ *ou* 3 . *Soit* $u_0 \in H$.

Alors, il existe un réel $t_0 > 0$, *dépendant des données* ν, Ω, u_0 , *tel que toute solution* u *du problème de Navier-Stokes associée à une force nulle vérifie*

$$u \in \mathcal{C}_b^\infty(\eta, +\infty; \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})), \quad \forall \eta > t_0 .$$

De plus, lorsque $t \longrightarrow +\infty$, *la norme de* $u^{(j)}(t)$ *dans* $H^m(\Omega)^N$ *tend vers* 0 *exponentiellement, pour tous* $j = 0, 1, \ldots$, *pour tous* $m = 0, 1, \ldots$

Ce résultat est démontré au § 4. Plus précisément, nous montrons qu'il existe un réel $t_1 > t_0$ et un réel $\bar{\xi}_1 \in]0, 1[$ tel que

$$|u^{(j)}(t)|_m \leqslant k_{j,m} \exp[-\nu\lambda_1 \bar{\xi}_1 (t - t_1)] , \quad \forall t \geqslant t_1 \tag{2.9}$$

où $k_{l,m}$ est une constante dépendant en outre des données ν, Ω, u_0, de t_1 et de t_0.

Remarque 2.4. – Si $N = 2$, la propriété (2.8) est vraie, pour tout $\eta > 0$ (cf. Remarque 1.7).

Remarque 2.5. – C. Foias – J.C. Saut [3] prouvent que, pour toute solution faible u du problème de Navier-Stokes associé à (2.7),

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} |u(t)| = -\nu\lambda(u), \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{|u(t)|} = v \quad \text{dans } H,$$

où $\lambda(u)$ est l'une des valeurs propres de A et v un vecteur propre associé. De plus, pour u_0 petit dans V, $\lambda(u)$ est "génériquement" égale à la plus petite valeur propre de A. Ultérieurement, L. Tartar [10] a montré que les relations ci-dessus sont vraies avec $|\cdot|$ remplacé par $\|\cdot\|$. Enfin, nous montrons (cf. [5]) que des propriétés analogues sont vérifiées dans tous les espaces H^m, $m \geqslant 0$.

2.3. Application aux ensembles fonctionnels invariants.

Nous supposons ici que f est indépendant de t, $f(t) \equiv f$, où $f \in H$.

Nous notons $S(t)$ l'application $\begin{cases} u_0 \longrightarrow u(t) \\ V \longrightarrow V \end{cases}$, définie pour tout $t > 0$ si $N = 2$ et pour $t \in [0, t(u_0)[$, si $N = 3$. ($t(u_0)$ a été défini dans l'exemple 1.2).

Nous dirons qu'un sous-ensemble X de V est invariant (pour l'équation de Navier-Stokes correspondante) si :

$$t(u) = +\infty \ \forall u \in X, \quad S(t)X = X \ \forall t > 0$$

(cf. C. Foias – R. Temam [4]).

En [4], il a été montré en particulier que tout ensemble invariant borné dans V, est de dimension de Hausdorff finie, et donc de dimension finie.

Ici, nous déduisons du Théorème 2.1 un résultat de régularité : tout ensemble invariant, borné dans V, est contenu dans $V \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^N$.

THEOREME 2.6. – *Soit $N = 2$ ou 3. Supposons que f est indépendante de t et que f appartient à $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^N \cap H$.*

Alors, tout ensemble invariant, borné dans V, *correspondant à l'équation de Navier-Stokes de donnée* f, *est contenu dans l'espace* $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^N \cap V$.

Remarque 2.7. – Même en dimension d'espace $N = 2$, nous ne connaissons pas de condition impliquant la propriété "l'ensemble invariant X est borné dans V". Toutefois, dans le cas $N = 2$, si u désigne la solution faible de (1.7)-(1.8) (i.e. vérifiant (1.9)), alors il existe un ensemble fonctionnel invariant X, borné dans V, tel que la distance dans H de $u(t)$ à X tende vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$ (cf. C. Foias – R. Temam [4]). Dans le cas $N = 3$, d'après la Proposition 2.3, si X est borné dans $H^{1/2+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, alors il est borné dans V. □

Remarque 2.8. – Du Théorème 2.3, nous déduisons que tout ensemble attracteur, borné dans V, est constitué de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette propriété est l'analogue de celle vérifiée par les solutions stationnaires ou périodiques en temps des équations de Navier-Stokes. □

Remarque 2.9. – *Il nous paraît important de remarquer que s'il existe des ensembles fonctionnels invariants non bornés dans* V, *alors la conjecture de Leray* [7] *sur la turbulence serait confirmée* (c'est-à-dire, existence, pour des données régulières, de solutions $u(t)$ des équations de Navier-Stokes qui ne sont pas bornées dans V). □

Idée de la démonstration du Théorème 2.6. – (cf. R. Temam [12]).

Nous utilisons la propriété d'analyticité du semi-groupe $S(t)$ qui implique que $S(t)$ est bijectif. Puis, nous utilisons le Théorème 2.1. □

Remarque 2.10. – Tous les résultats qui précèdent, s'étendent sans modification aucune au cas où Ω est un cube de R^N, $\Omega = Q = (0, L)^N$ (par exemple) et où les conditions aux limites en x sont la périodicité de période L par rapport à chaque coordonnée x_i. On se reportera à R. Temam [12] pour les modifications à apporter dans ce cas dans les définitions des espaces $\mathcal{V}$, H, V, V', E_m, ... et des opérateurs A, B, ... □

3. ESTIMATIONS DES DERIVEES DE u PAR RAPPORT AU TEMPS

Nous supposons dans ce paragraphe que u est une solution du problème (1.7)-(1.8) vérifiant $u \in L^\infty(t_0, +\infty; V)$, où $t_0 \geqslant 0$ est fixé.

Soit $\eta > t_0$ et soit X un Banach. Nous dirons qu'une fonction v de $L^\infty(\eta, +\infty; X)$ (resp. $\mathcal{E}(\eta, +\infty; X)$) vérifie la condition (N.C.) si la norme de v dans cet espace est majorée par une constante ne dépendant que des données ν, Ω, f, u_0, de t_0, de η et de $|u|_{L^\infty(t_0, +\infty; V)}$.

3.1.

Nous énonçons ici un résultat de régularité disant que les fonctions dérivées $u^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots$ sont des fonctions continues bornées à valeurs dans D(A) où j est aussi grand que la régularité de f le permet.

PROPOSITION 3.1. – *Soit* $N = 2$ *ou* 3. *Les hypothèses sur les données* u_0 et f *sont celles du Théorème 2.1 avec* $m = 2\ell$ *ou* $2\ell + 1$, $\ell \geqslant 0$.

Soit u *une solution forte du problème de Navier-Stokes associée aux données* u_0 *et* f *vérifiant*

$$u \in L^\infty(t_0, +\infty; V), \quad t_0 \geqslant 0 \text{ fixé.} \tag{3.1}$$

Alors, les fonctions dérivées de u *par rapport au temps vérifient*

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; E_3), \quad j = 0, \ldots, \ell - 1, \tag{3.2}$$

$$u^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; V_{m-2\ell}) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; V_{m-2\ell+1})^{(4)}, \tag{3.3}$$

$$u^{(\ell+1)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; V_{m-2\ell-1})^{(4)} \quad \text{pour tout } \eta > t_0. \tag{3.4}$$

De plus, ces fonctions vérifient la condition (N.C.).

Ce résultat, qui nous permet de donner une démonstration du Théorème 2.1 au § 3.2, sera démontré au cours des § 3.3 à 3.5.

(4) La suite d'espaces $V_{m-2\ell+1}$, $V_{m-2\ell}$, $V_{m-2\ell-1}$ est égale à V, H, V' si $m = 2\ell$, et à D(A), V, H si $m = 2\ell + 1$.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons $N = 3$ (les cas $N = 2$ et $N = 3$ diffèrent en ce qui concerne les majorations du terme non linéaire mais d'après la propriété (1.1), les majorations données pour $N = 3$ sont vérifiées aussi pour $N = 2$). Par ailleurs, les majorations données feront clairement apparaître que toutes les fonctions concernées vérifient la condition (N.C.) sous l'hypothèse (3.1) : cette propriété sera donc implicitement supposée démontrée.

3.2. Démonstration du Théorème 2.1.

Pour $m = 0, 1, 2$, le résultat du Théorème est contenu dans la Proposition 3.1. Soit donc $m \geqslant 3$ et $\ell = \left[\frac{m}{2}\right]$.

Soit $\eta > t_0$. Utilisant la propriété (1.2) de B, la propriété $u^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2\ell})$ donnée par la Proposition 3.3 et la relation

$$u^{(j)} = (-\nu A)^{-1} (u^{(j+1)} - g^{(j)}) , \quad j = 0, \ldots, \ell - 1 , \tag{3.5}$$

nous montrons de proche en proche que la propriété (2.5) est vérifiée.

i) Montrons que

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2\ell+2}) , \quad j = 0, \ldots, \ell - 1 . \tag{3.6}$$

Si $m = 2\ell$, cela est contenu dans la Proposition 3.1.

Si $m = 2\ell + 1$, de la propriété (3.2), de la continuité (1.2) de B, nous déduisons que les fonctions $[B(u)]^{(j)}$, $j = 0, \ldots, \ell - 1$, appartiennent à $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_1)$ et

$$|B(u(t))^{(j)}|_1 \leqslant c_j \sum_{p=0}^{j} |u^{(j-p)}(t)|_2 \, |u^{(p)}(t)|_2 . \tag{3.7}$$

Puis, de la relation (3.5) et de $u^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_1)$, nous déduisons que (3.6) est vérifié pour $m = 2\ell + 1$.

Nous avons donc en particulier démontré le Théorème pour $m = 3$.

ii) Supposons $\ell \geqslant 2$ et soit $s \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$. Par deux applications successives du raisonnement fait en i) (i.e. utilisation de la continuité (1.2) de B et de la relation (3.5)), nous montrons que

$$\left.\begin{array}{l} u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2\ell+2s}) \\ j = 0, \ldots, \ell - s \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2\ell+2s+2}) \\ j = 0, \ldots, \ell - s - 1 . \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Comme, d'après le i), la première propriété (3.8) est vérifiée pour $s = 1$, nous avons montré (par récurrence sur s) que

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2\ell+2s}), \quad j = 0, \ldots, \ell - s, \quad s = 1, \ldots, \ell .$$

En particulier, pour $j = \ell - s$ et $s = 0, \ldots, \ell$, nous obtenons

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; E_{m-2j}), \quad j = 0, \ldots, \ell . \qquad \square$$

3.3. Démonstration de la Proposition 3.1. dans le cas $m = 0$ et $m = 1$.

a) $m = 0$

Nous supposons que $u_0 \in H$ et $f \in \mathcal{C}_b(0, +\infty; V')$, et nous montrons que, sous l'hypothèse (3.1), nous avons un peu plus que (3.2)-(3.4) :

$$u \in \mathcal{C}_b(t_0, +\infty; H) \cap \mathcal{L}(0, +\infty; V),$$
$$u' \in \mathcal{L}(t_0, +\infty; V') .$$

Nous avons déjà remarqué (cf. Exemple 1.4) que

$$u \in \mathcal{C}_b(0, +\infty; H_{\text{faible}}) \cap \mathcal{L}(0, +\infty; V) .$$

Par ailleurs, la fonction $u' = \nu Au + f - B(u)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}(t_0, +\infty; V')$ car $u \in L^\infty(t_0, +\infty; V)$ et $Bu \in L^\infty(t_0, +\infty; V')$ puisque

$$\| B(u(t)) \|_* \leqslant c_1 \| u(t) \| \, |u(t)|_{1/2} \leqslant c_1' \, |u(t)|^{1/2} \| u(t) \|^{3/2} .$$

Par interpolation entre les espaces V et V' (cf. J.L. Lions – E. Magenes [9]), nous déduisons alors que $u \in \mathcal{C}_b(t_0, +\infty; H)$, puis que $u' \in \mathcal{L}(t_0, +\infty; V')$.

b) $m = 1$

Nous supposons que $u_0 \in H$ et $f \in \mathcal{C}_b(0, +\infty; H)$. Montrons que, sous l'hypothèse (3.1),

$$\begin{array}{l} u \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; V) \cap \mathcal{L}(\eta, +\infty, D(A)), \\ u' \in \mathcal{L}(\eta, +\infty; H), \quad \forall \eta > t_0 . \end{array} \tag{3.9}$$

L'inégalité (1.10) et l'hypothèse (3.1) impliquent que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\,|Au(t)|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}\,|f|^2_{0,\infty} + \frac{c_0}{\nu^3}\,|u|^6_{1,\infty}\ , \quad \text{p.p.}\ \ t \geqslant t_0\ . \tag{3.10}$$

Soit $\eta > t_0$. D'après l'hypothèse (3.1), il existe $t_1 \in (t_0\,,\eta)$ tel que $u(t_1) \in V$. L'inégalité (3.10) implique alors que

$$u \in \mathcal{E}(t_1\,,+\infty\,;D(A))\ .$$

Par ailleurs, la fonction $u' = -\nu Au + f - B(u)$ appartient à l'espace $\mathcal{E}(t_1\,,+\infty\,;H)$ car $u \in L^\infty(t_0\,,+\infty\,;V)$ et

$$|B(u(t))| \leqslant c_2\,\|u(t)\|^{3/2}\,|Au(t)|^{1/2} \leqslant c_2'\,|u|^{3/2}_{1,\infty}\,|Au(t)|^{1/2}\ . \tag{3.11}$$

Par interpolation entre les espaces $D(A)$ et H, nous déduisons alors que $u \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;V)$.

Remarque 3.2. – D'après ce qui précède, si $u(t_0) \in V$ et $m = 1$, alors la fonction u est continue bornée de $[t_0\,,+\infty[\longrightarrow V$ (sous l'hypothèse (3.1)).

3.4. Démonstration de la Proposition 3.1. dans le cas $m \geqslant 2$.

Soit $m \geqslant 2$ et $\ell = \left[\frac{m}{2}\right]$. Nous faisons les hypothèses

$$u_0 \in H\ , \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} f^{(j)} \in \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;E_{m-2j}) \quad , \quad j = 0\,,\ldots\,,\ell-1\ , \\ f^{(\ell)} \in \begin{cases} \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;V') & \text{si} \quad m = 2\ell\ , \\ \mathcal{C}_b(0\,,+\infty\,;H) & \text{si} \quad m = 2\ell+1\ . \end{cases} \end{cases} \tag{3.13}$$

D'après la Proposition 3.1. appliquée pour $m = 1$, toute solution u vérifiant $u \in L^\infty(t_0\,,+\infty\,;V)$ est une solution forte des équations de Navier-Stokes et vérifie

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}_b(\eta\,,+\infty\,;V) \cap \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;D(A))\ , \\ u' \in \mathcal{E}(\eta\,,+\infty\,;H) \quad , \quad \forall\,\eta > t_0\ . \end{cases} \tag{3.14}$$

De plus, la fonction u est, sur tout intervalle borné $[\eta\,,t_1]$, aussi régulière que f le permet, c'est-à-dire

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}([\eta, t_1]; E_{m-2j}) \quad , \quad j = 0, \ldots, \ell ,$$

pour tous η, t_1 vérifiant $t_0 < \eta < t_1$ (cf. R. Temam [13]).

Le schéma de la démonstration de la Proposition 3.1. pour $m \geqslant 2$ est le même que pour $m \leqslant 1$, mais le fait qu'un grand nombre de fonctions $u^{(j)}$ est concerné rend l'exposé plus délicat.

Les lemmes suivants permettent une présentation systématique de la démonstration de la Proposition.

LEMME 3.3. – *Soit* (X_0, X_1, X_2, X_3) *la suite d'espaces* $(H, V, D(A), E_3)$ (*resp.* $(V', H, V, D(A))$.

Soit $j \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$ *si* $m = 2\ell$, $\{1, \ldots, \ell\}$ *si* $m = 2\ell + 1$ (*resp.* $j \in \{1, \ldots, \ell\}$).

Supposons que

$$\begin{aligned} &u^{(p)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; X_2) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; X_3) \quad , \quad p = 0, \ldots, j-1 , \\ &u^{(j)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; X_1) \quad , \quad \forall \eta > t_0 , \end{aligned} \tag{3.15}$$

et que les fonctions $u, \ldots, u^{(j)}$ *vérifient la condition (N.C.).*

Alors

$$\begin{aligned} &u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; X_1) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; X_2) , \\ &u^{(j+1)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty; X_0) \quad , \quad \forall \eta > t_0 , \end{aligned} \tag{3.16}$$

et les fonctions $u^{(j)}$ *et* $u^{(j+1)}$ *satisfont la condition (N.C.) dans ces espaces.*

LEMME 3.4. – *Soit* $j \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$.

Supposons que[5]

$$\begin{aligned} &u^{(p)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; E_3) \quad , \quad p = 0, \ldots, j-1 , \\ &u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; V) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; D(A)) , \\ &u^{(j+1)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; H) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; V) \quad , \quad \forall \eta > t_0 , \end{aligned} \tag{3.17}$$

et que les fonctions $u, \ldots, u^{(j+1)}$ *vérifient la condition (N.C.).*

Alors

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty; E_3) \quad , \forall \eta > t_0 , \tag{3.18}$$

et la fonction $u^{(j)}$ *satisfait la condition (N.C.) dans ces espaces.*

(5) La première condition (3.17) n'existe pas si $j = 0$.

Les lemmes seront démontrés au § 3.5. Admettant pour l'instant ces lemmes, nous sommes en mesure de donner une démonstration de la Proposition 3.1.

Démonstration de la Proposition 3.1. – Nous effectuons une récurrence sur $j = 0, \ldots, \ell$ de la manière suivante :

i) Appliquons le Lemme 3.3 avec

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) = (V', H, V, D(A))$$

et avec $j = 1$: d'après (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} &u' \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; H) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty ; V) \\ &u'' \in \mathcal{E}(\eta, +\infty ; V') \quad , \quad \forall \eta > t_0 \ , \end{aligned} \tag{3.19}$$

puis, du Lemme 3.4, nous déduisons que

$$u \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty ; E_3) \quad , \quad \forall \eta > t_0 \ . \tag{3.20}$$

Donc, si $m = 2$, la Proposition 3.1 est démontrée. Si $m = 3$, la Proposition sera montrée au § iv).

ii) Nous supposons ici $m \geqslant 4$ et nous fixons $j \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$.

Nous montrons que

$$\begin{aligned} &u^{(p)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; D(A)) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty ; E_3) \quad , \quad p = 0, \ldots, j-1 \ , \\ &u^{(j)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty ; V) \quad , \quad \forall \eta > t_0 \ . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Appliquons le Lemme 3.3 avec $(X_0, X_1, X_2, X_3) = (H, V, D(A), E_3)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; V) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty ; D(A)) \ , \\ &u^{(j+1)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty ; H) \ , \end{aligned} \tag{3.22}$$

puis nous appliquons de nouveau le Lemme 3.3 avec

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) = (V', H, V, D(A))$$

et j remplacé par $j + 1$, et nous obtenons

$$\begin{aligned} &u^{(j+1)} \in \mathcal{C}(\eta, +\infty ; H) \cap \mathcal{E}(\eta, +\infty ; V) \ , \\ &u^{(j+2)} \in \mathcal{E}(\eta, +\infty ; V') \quad , \quad \forall \eta > t_0 \ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Enfin, appliquant le Lemme 3.4, nous obtenons

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; D(A)) \cap \mathcal{B}(\eta, +\infty ; E_3) \quad , \quad \forall \eta > t_0 \, . \tag{3.24}$$

De (3.22)-(3.24), nous déduisons que la propriété (3.21) est vraie avec j remplacé par $(j+1)$. Mais, comme d'après (3.19)-(3.20) la propriété (3.21) est vraie pour $j = 1$, nous avons démontré par récurrence que

$$\begin{aligned} &u^{(p)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; D(A)) \cap \mathcal{B}(\eta, +\infty ; E_3) \quad , \quad p = 0, \ldots, \ell - 1 \, , \\ &u^{(\ell)} \in \mathcal{B}(\eta, +\infty ; V) \quad , \quad \forall \eta > t_0 \, . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Cela démontre la propriété (3.2).

iii) De plus, les propriétés (3.23) sont vraies pour $j = \ell - 1$ et en particulier

$$\begin{aligned} &u^{(\ell)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; H) \cap \mathcal{B}(\eta, +\infty ; V) \, , \\ &u^{(\ell+1)} \in \mathcal{B}(\eta, +\infty ; V') \quad , \quad \forall \eta > t_0 \, . \end{aligned}$$

Cela démontre la Proposition pour $m = 2\ell$, $\ell \geqslant 2$.

iv) Soit $m = 2\ell + 1$, avec $\ell \geqslant 1$. Nous appliquons le Lemme 3.3 avec $(X_0, X_1, X_2, X_3) = (H, V, D(A), E_3)$ et $j = \ell$.

De (3.19)-(3.20) si $\ell = 1$ ou de (3.25) si $\ell > 1$, nous déduisons les propriétés (3.3)-(3.4). Cela démontre la Proposition pour $m = 2\ell + 1$, $\ell \geqslant 1$. □

3.5. Démonstration du Lemme 3.3.

Soit $\eta > t_0$.

a) Montrons l'existence d'un réel $t_1 \in]t_0, \eta[$ tel que $u^{(j)}$ soit solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u^{(j)}(t) + \nu A u^{(j)}(t) = [f(t) - B(u(t))]^{(j)} \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant t_1 \, , \\ u^{(j)}(t_1) \in X_1 \, , \end{cases} \tag{3.26}$$

et tel que la norme de $u^{(j)}(t_1)$ dans X_1 soit majorée par une constante ne dépendant que des données, de t_0, η et de $|u|_{L^\infty(t_0, +\infty ; V)}$. La première relation (3.26) est déduite par dérivation de (1.7).

Raisonnons par l'absurde : soit $\tau \in \left[t_0 , \frac{t_0 + \eta}{2}\right]$ et supposons que

$$|u^{(j)}(t)|^2_{X_1} \geqslant R > 0 \quad , \quad \forall t \in (\tau , \eta) .$$

Comme $u^{(j)} \in \mathcal{C}(\tau , +\infty ; X_1)$, nous avons

$$R \frac{\eta - t_0}{2} < R(\eta - \tau) \leqslant \int_\tau^\eta |u^{(j)}(s)|^2_{X_1} ds \leqslant [u^{(j)}]^2_{X_1 , \eta - \tau} \leqslant [u^{(j)}]^2_{X_1 , \eta - t_0} .$$

Choisissant par exemple $R = 2[u^{(j)}]^2_{X_1 , \eta - t_0}/(\eta - t_0)$, nous obtenons l'existence de $t_1 \in]t_0 , \eta[$ tel que

$$u^{(j)}(t_1) \in X_1 \quad \text{et} \quad |u^{(j)}(t_1)|^2_{X_1} \leqslant 2[u^{(j)}]^2_{X_1 , \eta - t_0}/(\eta - t_0) .$$

b) Montrons que $g^{(j)} = [f - B(u)]^{(j)}$ appartient à $L^2_{loc}(t_1 , +\infty ; X_0)$.

Nous écrivons

$$B(u(t))^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} B(u^{(j-k)}(t) , u^{(k)}(t)) .$$

i) Cas où $(X_0, X_1 , X_2 , X_3) = (H, V, D(A), E_3)$.

D'après la propriété (1.1), nous obtenons

$$|B(u(t))^{(j)}| \leqslant c_j \left(\sum_{k=1}^{j} \|u^{(k)}(t)\| \, |Au^{(j-k)}(t)| \right) \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant t_1$$

ce qui, avec l'hypothèse (3.15), implique le résultat désiré.

De plus, nous avons aussi la majoration

$$|B(u(t))^{(j)}| \leqslant c'_j \left(\sum_{k=0}^{j} \|u^{(j-k)}(t)\| \, \|u^{(k)}(t)\|^{1/2} \, |Au^{(k)}(t)|^{1/2} \right) ,$$

soit, en utilisant (3.15),

$$|B(u(t))^{(j)}| \leqslant K_j(|u|_{1,\infty}) (1 + \|u^{(j)}(t)\| + \|u^{(j)}(t)\|^{1/2} \, |Au^{(j)}(t)|^{1/2}) , \quad (3.27)$$

où $K_j(|u|_{1,\infty})$ est une constante dépendant en outre des données, de t_0 et η.

ii) Cas où $(X_0, X_1 , X_2 , X_3) = (V', H, V, D(A))$.

De la propriété (1.1), nous déduisons que

$$g^{(j)} \in L^2_{loc}(t_1, +\infty; V_{-3/2})$$

avec $$|B(u(t))^{(j)}|_{-3/2} \leqslant c_j \Big(\sum_{k=0}^{j-1} |u^{(j-k)}(t)| \, \|u^{(k)}(t)\| \Big);$$

puis, de l'équation (3.26), nous déduisons que

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}(t_1, +\infty; V_{1/2}) \cap L^2_{loc}(t_1, +\infty; V_{1/2}).$$

Enfin, de la propriété (1.1), nous déduisons le résultat désiré avec

$$\|B(u(t))^{(j)}\|_* \leqslant c'_j \Big(\sum_{k=0}^{j-1} |u^{(j-k)}(t)|_{1/2} \, \|u^{(k)}(t)\| \Big)$$

soit, d'après l'hypothèse (3.15),

$$\|B(u(t))^{(j)}\|_* \leqslant K_j(|u|_{1,\infty}) \, (1 + |u^{(j+1)}(t)|^{1/2} \, \|u^{(j+1)}(t)\|^{1/2}) . \quad (3.28)$$

c) De a) et b) nous déduisons que la fonction $u^{(j)}$ appartient à $\mathcal{C}(t_1, +\infty; X_1) \cap L^2_{loc}(t_1, +\infty; X_2)$. De plus, $u^{(j)}$ vérifie l'estimation a priori

$$\frac{d}{dt} |u^{(j)}(t)|^2_{X_1} + \nu \, |u^{(j)}(t)|^2_{X_2} \leqslant K'_j(|u|_{1,\infty}) \, (1 + |u^{(j)}(t)|^2_{X_1}), \quad \text{p.p. } t \geqslant t_1, \quad (3.29)$$

où $K'_j(|u|_{1,\infty})$ est une constante dépendant en outre des données, de η et de t_0.

En effet, formellement[6], nous multiplions l'équation (3.26) par $u^{(j)}(t)$ dans H et nous majorons $g^{(j)}(t)$ en utilisant l'estimation (3.27) ou (3.28). Une formule de Young permet d'obtenir (3.29).

d) Le Lemme 1.6 appliqué à la fonction $t \longrightarrow \phi(t) = |u^{(j)}(t)|^2_{X_1}$ montre que $u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(t_1, +\infty; X_1) \cap \mathcal{B}(t_1, +\infty; X_2)$.

Enfin, des inégalités (3.27) ou (3.28), nous déduisons que la fonction $g^{(j)} \in \mathcal{B}(t_1, +\infty; X_0)$ et donc que $u^{(j+1)} = -\nu A u^{(j)} + g^{(j)}$ appartient à $\mathcal{B}(t_1, +\infty; X_0)$.

---

(6) L'inégalité (3.29) est en fait obtenue pour les fonctions approximées $(u_n^{(j)})_{n \in \mathbf{N}}$ de $u^{(j)}$ par une méthode de Galerkin, puis, pour la fonction u, par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration du Lemme 3.4. – Soit $\eta > t_0$.

Des hypothèses (3.17), de la relation (3.11) pour $j = 0$ ou de la relation (3.27) pour $j \geqslant 1$, nous déduisons que la fonction

$$u^{(j)} = (-\nu A)^{-1}(u^{(j+1)} - g^{(j)})$$

vérifie

$$|Au^{(j)}(t)| \leqslant K_j''(|u|_{1,\infty})(1 + |Au^{(j)}(t)|^{1/2}) \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant \eta ,$$

ce qui prouve en utilisant l'inégalité de Young que

$$u^{(j)} \in L^\infty(\eta, +\infty ; D(A)) .$$

De la propriété (1.3) et du fait que les fonctions $u^{(p)}$, $p = 0, \ldots, j$, appartiennent à $L^\infty(\eta, +\infty ; D(A)) \cap \mathcal{C}(\eta, +\infty ; V)$, nous déduisons que l'application $t \longrightarrow B(u(t))^{(j)}$ est continue de $[\eta, +\infty[$ dans H et donc que la fonction $u^{(j)}$ est continue de $[\eta, +\infty[$ dans D(A).

Enfin, d'après la propriété (1.2), nous avons

$$\|B(u(t))^{(j)}\| \leqslant c_j''\Big(\sum_{k=0}^{j} |Au^{(j-k)}(t)|\,|Au^{(k)}(t)|\Big) \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant \eta ,$$

ce qui prouve avec ce qui précède que la fonction $u^{(j)} \in \mathcal{C}(\eta, +\infty ; E_3)$. □

4. ETUDE DU CAS OU $f = 0$

Dans ce paragraphe nous désignons par c_0 une constante telle que

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_0 \begin{cases} \|u\|\,|Av|\,|w| , & \forall (u, v, w) \in V \times D(A) \times H , \\ \|u\|\,\|v\|\,\|w\| , & \forall (u, v, w) \in V \times V \times V . \end{cases} \tag{4.1}$$

Soit $u_0 \in H$. Soit u une solution faible des équations de Navier-Stokes, associée à u_0 et à $f \equiv 0$ et soit t_0 un réel, dépendant de ν, Ω, u_0, et éventuellement de u, tel que u vérifie $u \in L^\infty(t_0, +\infty ; V)$ (cf. § 2.2).

4.1. Une estimation de t_0.

LEMME 4.1. – *Soit* $u_0 \in H$.

Il existe t_0, *vérifiant*

$$0 \leqslant t_0 \leqslant \frac{1}{2\nu}\left(\frac{c_0}{\nu}|u_0|\right)^2, \tag{4.2}$$

tel que toute solution u *soit décroissante dans* V *pour* $t \geqslant t_0$ *et converge vers* 0 *quand* $t \longrightarrow +\infty$.

Plus précisément, il existe une constante $\xi_0 \in]0,1[$ *telle que*

$$\|u(t)\| \leqslant \frac{\nu}{c_0}\exp[-\nu\lambda_1\xi_0(t-t_0)] \quad , \quad \forall t \geqslant t_0 . \tag{4.3}$$

Démonstration. – De (1.19)-(1.20), nous déduisons

$$|u(t)| \leqslant |u_0|\exp(-\nu\lambda_1 t) \quad , \quad \forall t \geqslant 0, \tag{4.4}$$

$$2\nu\left(\int_s^t \|u(\tau)\|^2\, d\tau\right) \leqslant |u(s)|^2 \quad , \quad \forall s, t, \ 0 \leqslant s \leqslant t . \tag{4.5}$$

D'autre part, de l'équation (1.7) et de (4.1), nous déduisons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu|Au(t)|^2 \leqslant c_0\|u(t)\|\,|Au(t)|^2 \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant 0,$$

soit

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\nu\left(1 - \frac{c_0}{\nu}\|u(t)\|\right)|Au(t)|^2 \leqslant 0 \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant 0 . \tag{4.6}$$

Notons ξ la fonction de $L^2_{loc}(0, +\infty)$ définie par

$$\xi(t) = 1 - \frac{c_0}{\nu}\|u(t)\| \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant 0 . \tag{4.7}$$

Notons $t_* = \frac{1}{2\nu}\left(\frac{c_0}{\nu}|u_0|\right)^2$. De la relation (4.5), nous déduisons en raisonnant par l'absurde qu'il existe $t_0 \in [0, t_*]$ tel que $u(t_0) \in V$ et tel que $\xi_0 = \xi(t_0) > 0$. En particulier $\|u(t_0)\| < \frac{\nu}{c_0}$.

Mais la relation (4.6), écrite au point $t = t_0$, montre que la fonction $t \longrightarrow \|u(t)\|$ est décroissante au voisinage de t_0 et vérifie

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\nu\xi_0\lambda_1\|u(t)\|^2 \leqslant 0 \quad , \quad \text{p.p. } t \text{ au voisinage de } t_0 . \tag{4.8}$$

En fait, l'ensemble $\{t \geqslant t_0 \mid \|u(s)\| \leqslant \|u(t_0)\|, \text{ p.p. } s \in [t_0, t]\}$ coïncide avec l'intervalle $[t_0, +\infty[$ et donc la relation (4.8) est vraie pour presque tout $t \geqslant t_0$. Intégrant cette relation sur (t_0, t), nous obtenons que $u \in L^\infty(t_0, +\infty; V)$ avec

$$\|u(t)\| \leqslant \|u(t_0)\| \exp[-\nu\lambda_1\xi_0(t - t_0)]$$

$$\leqslant \frac{\nu}{c_0} \exp[-\nu\lambda_1\xi_0(t - t_0)] \quad , \quad \text{p.p. } t \geqslant t_0 . \tag{4.9}$$

Du théorème 2.1 et de la Remarque 3.2, nous déduisons alors $u \in \mathcal{C}_b(t_0, +\infty; V)$.

De plus, comme la fonction $t \longrightarrow \xi(t)$ est croissante pour $t \geqslant t_0$, nous déduisons de (4.8) que

$$\|u(t)\| < \frac{\nu}{c_0} \exp[-\nu\lambda_1\xi(\eta)(t - \eta)] \quad , \quad \forall (t, \eta) \quad , \quad t_0 \leqslant \eta \leqslant t . \quad \square \tag{4.10}$$

Remarque 4.2. – Donnons une meilleure estimation de t_0. Notons c_1 une constante telle que

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_1 \|u\| \, |v|_{3/2} \, |w| \quad , \quad \forall (u, v, w) \in V \times V_{3/2} \times H \tag{4.11}$$

Utilisant (4.11), nous obtenons au lieu de

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\nu\left(1 - \frac{c_1}{\nu}\|u(t)\|^{3/2} \, |Au(t)|^{-1/2}\right)|Au(t)|^2 \leqslant 0 ,$$

soit en utilisant la relation

$$\|v\|^2 \leqslant |Av| \, |v| \quad , \quad \forall v \in D(A) , \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\nu\left(1 - \frac{c_1}{\nu}\|u(t)\|^{1/2} \, |u(t)|^{1/2}\right)|Au(t)|^2 \leqslant 0 .$$

De (4.5), nous déduisons alors l'existence d'un réel t_0' vérifiant

$$0 \leqslant t_0' \leqslant \frac{1}{2\nu\lambda_1} \operatorname{Log}\left[1 + \left(\frac{c_1}{\nu}\lambda_1^{1/4}|u_0|\right)^4\right]$$

tel que la fonction $t \longrightarrow \|u(t)\|$ soit décroissante pour $t \geqslant t_0$ et vérifie l'inégalité (4.10) avec

$$\xi(t) = 1 - \frac{c_1}{\nu} \|u(t)\|^{1/2} |u(t)|^{1/2} . \qquad \square$$

Dans la suite du paragraphe 4, t_0 et ξ_0 sont fixés comme dans le Lemme 4.1. Du Théorème 2.1, nous déduisons alors que

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}_b(\eta, +\infty ; E_m) \ , \ \forall j = 0,1, \ldots , \ \forall m = 0,1, \ldots , \ \forall \eta > t_0 \tag{4.13}$$

et la norme de $u^{(j)}$ dans cet espace est majorée par une constante dépendant de $j, m, \eta,$ des données $\nu, \Omega, |u_0|,$ de t_0 et ξ_0.

4.2. Etude de la fonction u'.

LEMME 4.3. – *La fonction* $u' :]t_0, +\infty[\longrightarrow H$ *est décroissante et converge vers* 0 *quand* $t \longrightarrow +\infty$. *De plus, il existe une constante* c_1, *dépendant de* Ω, ν, *telle que*

$$|u'(t)| < c_1 [\xi_0(\eta - t_0)]^{-1/2} \exp [-\nu\lambda_1 \xi(\eta)(t - \eta)] , \ \forall t \geqslant \eta > t_0 . \tag{4.14}$$

Démonstration. – a) En utilisant (4.1) et l'équation vérifiée par u', nous déduisons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'(t)|^2 + \nu \|u'(t)\|^2 \leqslant c_0 \|u'(t)\|^2 \|u'(t)\| \quad , \quad \forall t > t_0 ,$$

soit, d'après la définition (4.7) de ξ,

$$\frac{d}{dt} |u'(t)|^2 + 2\nu\xi(t) \|u'(t)\|^2 \leqslant 0 \quad , \quad \forall t > t_0 . \tag{4.15}$$

L'application $t \longrightarrow |u'(t)|$ est donc décroissante sur $]t_0, +\infty[$; de plus

$$|u'(t)| \leqslant |u'(\eta)| \exp [-\nu\lambda_1 \xi(\eta)(t - \eta)] \quad , \quad \forall t \geqslant \eta > t_0 .$$

b) Soit $\eta > t_0$. Nous cherchons à estimer $|u'(\eta)|$. De $u' = -\nu Au - B(u)$ nous déduisons

$$|u'(t)| \leqslant \nu |Au(t)| + c_0 \|u(t)\| |Au(t)| \leqslant \nu(2 - \xi(t)) |Au(t)| . \tag{4.16}$$

Par ailleurs, d'après l'équation (4.6), nous avons

$$2\nu\xi_0 \left(\int_{t_0}^{\eta} |Au(t)|^2 \, dt \right) \leqslant \|u(t_0)\|^2 < \left(\frac{\nu}{c_0}\right)^2 . \qquad (4.17)$$

En raisonnant par l'absurde, nous déduisons de (4.17) qu'il existe $t_2 \in (t_0, \eta)$ tel que $|Au(t_2)| \leqslant \frac{\nu}{c_0} [2\nu\xi_0(\eta - t_0)]^{-1/2}$ et d'après (4.16) tel que

$$|u'(t_2)| \leqslant \frac{\nu^2}{c_0}(2 - \xi_0)\,[2\nu\xi_0(\eta - t_0)]^{-1/2} \leqslant \frac{2\nu^2}{c_0}\,[2\nu\xi_0(\eta - t_0)]^{-1/2} .$$

Comme l'application $t \longrightarrow |u'(t)|$ est décroissante, nous avons $|u'(\eta)| \leqslant |u'(t_2)|$ et donc la relation (4.14) est vérifiée avec

$$c_1 = \frac{\nu}{c_0}(2\nu)^{1/2} . \qquad \square$$

LEMME 4.4 (cf. aussi J. Heywood [14]). — *La fonction* u *tend vers* 0 *dans* D(A) *quand* $t \to +\infty$ *et vérifie*

$$|Au(t)| < c_1 [\xi_0^3(\eta - t_0)]^{-1/2} \exp[-\nu\lambda_1 \xi(\eta)\,(t - \eta)] , \quad \forall t \geqslant \eta > t_0 . \qquad (4.18)$$

Démonstration. — De $\nu Au = -u' - B(u)$, nous déduisons

$$\nu\,|Au(t)| \leqslant |u'(t)| + c_0\,\|u(t)\|\,|Au(t)| , \quad \forall t > t_0$$

soit, d'après la définition de ξ,

$$\nu\xi_0\,|Au(t)| \leqslant \nu\xi(t)\,|Au(t)| \leqslant |u'(t)| , \quad \forall t > t_0 .$$

Nous déduisons alors (4.18) de (4.14). $\square$

Remarque 4.5. — De (4.4), (4.12) et (4.18), nous déduisons que

$$\|u(t)\| \leqslant c_1\,|u_0|\,[\xi_0^3(\eta - t_0)]^{-1/2} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{1 + \xi(\eta)}{2}\,(t - \eta)\right]$$
$$\forall t \geqslant \eta > t_0 , \qquad (4.19)$$

ce qui, comparé avec (4.10), donne une convergence plus rapide vers 0, quand $t \longrightarrow +\infty$. $\square$

LEMME 4.6. — *Il existe un réel* t_1 *vérifiant*

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_0 + \frac{2}{\nu}\,\frac{1}{\xi_0^5 \lambda_1} \tag{4.20}$$

tel que la fonction $u' : [t_1, +\infty[\longrightarrow V$ *soit décroissante, converge vers* 0 *quand* $t \longrightarrow +\infty$. *Il existe une constante* $\zeta_1 \in]0, \xi_1[$ *dépendant de* ν, Ω, u_0 *et une constante* $k_{1,1}$ *dépendant de* ν, Ω, u_0, ξ_0 *et* t_1 *telles que*

$$\|u'(t)\| \leqslant k_{1,1} \exp[-\nu\lambda_1 \zeta_1 (t - t_1)] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \, . \tag{4.21}$$

Démonstration. – a) De (4.1) et de l'équation vérifiée par u', nous déduisons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'(t)\|^2 + \nu |Au'(t)|^2 \leqslant c_0 [\|u(t)\| \, |Au'(t)|^2 + \|u'(t)\| \, |Au(t)| \, |Au'(t)|]$$

soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'(t)\|^2 + \nu \left[1 - \frac{c_0}{\nu}\|u(t)\| - \frac{c_0}{\nu}|Au(t)|\|u'(t)\| \, |Au'(t)|^{-1}\right] |Au'(t)|^2 \leqslant 0 \, .$$

De la propriété $\lambda_1^{1/2} \|v\| \leqslant |Av|$, $\forall v \in D(A)$, nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\|u'(t)\|^2 + 2\nu\zeta(t) |Au'(t)|^2 \leqslant 0 \quad , \quad \forall t \geqslant \eta > t_0 \, , \tag{4.22}$$

où nous avons noté ζ la fonction de $\mathcal{C}_b(\eta, +\infty)$ définie par

$$\zeta(t) = 1 - \frac{c_0}{\nu}\|u(t)\| - \frac{c_0}{\nu}\lambda_1^{-1/2} |Au(t)|$$

$$= \xi(t) - \frac{c_0}{\nu}\lambda_1^{-1/2} |Au(t)| \quad , \quad \forall t \geqslant \eta \, . \tag{4.23}$$

La fonction u convergeant vers 0 dans D(A), quand $t \longrightarrow +\infty$, il existe $t_1 > t_0$ tel que $\zeta_1 = \zeta(t_1)$ soit strictement positif. De l'inégalité (4.22), nous déduisons que la fonction $t \longrightarrow \|u'(t)\|$ est décroissante pour $t \geqslant t_1$, converge vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$ et vérifie une estimation de la forme (4.21).

b) *Estimation de* t_1.

D'après (4.23), t_1 est tel que

$$|Au(t_1)| < \frac{\xi_1 \nu}{c_0} \lambda_1^{1/2} \quad , \quad t_1 > t_0 \, . \tag{4.24}$$

Comme d'après (4.18), nous avons

$$|Au(t_1)| < c_1 [\xi_0^3 (t_1 - t_0)]^{-1/2} \quad \text{et} \quad \xi_0 \leqslant \xi_1 \, ,$$

la condition (4.24) sera vérifiée si $c_1 [\xi_0^3 (t_1 - t_0)]^{-1/2} \leqslant \frac{\xi_0 \nu}{c_0} \lambda_1^{1/2}$.

Donc, pour tout réel $t_1 \geqslant t_0 + \left(\frac{c_1 c_0}{\nu}\right)^2 \frac{1}{\lambda_1 \xi_0^5}$, la condition $\zeta(t_1) > 0$ est vérifiée. □

Remarque 4.7. – Un calcul de la constante $k_{1,1}$ donne

$$k_{1,1} = \exp \left[\frac{2}{\xi_0} \left(\frac{c_0}{\nu} |u_0| \right)^2 \right] \frac{2}{c_0 \xi_0^2} (t_1 - t_0)^{-2}$$

où $t_1 > t_0$. □

Dans la suite, pour des raisons techniques (cf. § 4.3), nous allons fixer $\eta = t_1 > t_0$ tel que

$$\frac{\xi(t_1)}{2} = \frac{\xi_1}{2} < \zeta_1 \leqslant \xi_1 \, , \tag{4.25}$$

ce qui est bien sûr possible car $\frac{\xi(t)}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$ et $\zeta(t) \longrightarrow 1$ quand $t \longrightarrow +\infty$. L'estimation de t_1 correspondante à (4.20) est alors

$$t_0 < t_1 \leqslant t_0 + \frac{8}{\nu} \frac{1}{\xi_0^5 \lambda_1} \, . \tag{4.26}$$

4.3. Démonstration du Théorème 2.1.

Correspondant à la Proposition 3.1, nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 4.8. – *Il existe des constantes* $k_{j,2}$, $j = 1, 2 \ldots$, *dépendant des données et de* t_1, *telles que*

$$|Au^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,2} \exp \left[-\nu \lambda_1 \frac{\xi_1}{2} (t - t_1) \right] \quad \forall t \geqslant t_1 \, , \quad \forall j = 1, 2, \ldots \tag{4.27}$$

Ce résultat permet de donner une démonstration du Théorème 2.2 similaire à celle du Théorème 2.1 : nous montrons par récurrence que pour tout $m = 0, 1, \ldots$

$$\begin{cases} |u^{(j)}(t)|_{m-2j} \leqslant k_{j,m-2j} \exp\left(-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right) \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 , \\ j = 0, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right] . \end{cases} \tag{4.28}$$

Cela montre l'inégalité (2.9) avec $\bar{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{2}$.

Pour montrer la Proposition 4.8, nous utilisons les résultats suivants.

LEMME 4.9. – *Soit j un entier $\geqslant 2$.*

Supposons que

$$\begin{cases} |Au^{(p)}(t)| \leqslant k_{p,2} \exp\left(-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right) \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 , \\ p = 1, \ldots, j-1 . \end{cases} \tag{4.29}$$

Alors, il existe une constante $k_{j,1}$ dépendant des données telle que

$$\|u^{(j)}(t)\| \leqslant k_{j,1} \exp\left(-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right) \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 . \tag{4.30}$$

LEMME 4.10 . – *Soit j un entier $\geqslant 1$.*

Supposons que[7]

$$\begin{cases} \|u^{(p)}(t)\| \leqslant k_{p,1} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad p = 2, \ldots, j-1 , \\ |u^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,0} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] , \\ \|u^{(j)}(t)\| \leqslant k_{j,1} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 . \end{cases} \tag{4.31}$$

(7) Pour $j = 1$ et 2, la première hypothèse n'existe pas.

Alors, il existe une constante $k_{j+1,0}$ *telle que*

$$|u^{(j+1)}(t)| \leqslant k_{j+1,0} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \ . \tag{4.32}$$

LEMME 4.11. – *Soit* j *un entier* $\geqslant 1$.

Supposons que[8]

$$\begin{cases} |Au^{(p)}(t)| \leqslant k_{p,2} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad p = 1, \ldots, j-1 \ , \\ |u^{(j+1)}(t)| \leqslant k_{j+1,0} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \ . \end{cases} \tag{4.33}$$

Alors, il existe une constante $k_{j,2}$ *telle que*

$$|Au^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,2} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \ . \tag{4.34}$$

Démonstration de la Proposition 4.8. – Nous effectuons une récurrence de la manière suivante.

a) Nous appliquons le Lemme 4.10, puis le Lemme 4.11 pour $j = 1$.

De (4.14) et (4.21), nous déduisons que

$$|u^{(2)}(t)| \leqslant k_{2,0} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] ,$$

$$|Au'(t)| \leqslant k_{1,0} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \ .$$

b) Soit $j \geqslant 2$. Supposons que

$$\begin{cases} |Au^{(p)}(t)| \leqslant k_{p,2} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad p = 1, \ldots, j-1 \ , \\ |u^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,0} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \ . \end{cases} \tag{4.35}$$

(8) Pour $j = 1$, la première hypothèse n'existe pas.

Alors, en appliquant successivement les Lemmes 4.9, 4.10, 4.11, nous déduisons que la propriété (4.35) est vérifiée avec j remplacé par $j+1$. Comme d'après le a), la propriété (4.35) est vraie pour $j=2$, nous avons montré la Proposition. □

4.4. Démonstration des Lemmes 4.9 à 4.11.

Démonstration du Lemme 4.9. – Soit $j \geqslant 2$.

Précisons l'inégalité (3.29) dans le cas particulier $f \equiv 0$ et $(X_1, X_2) = (V, D(A))$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^{(j)}(t)\|^2 + \nu |Au^{(j)}(t)|^2 \leqslant c_0 [\|u(t)\| \, |Au^{(j)}(t)|^2 + |Au(t)| \, \|u^{(j)}(t)\| \, |Au^{(j)}(t)|] + c_j \Big(\sum_{k=1}^{j-1} \|u^{(j-k)}(t)\| \, |Au^{(k)}(t)| \Big) |Au^{(j)}(t)| \quad (4.36)$$

soit, d'après la définition (4.23) de ζ,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^{(j)}(t)\|^2 + \nu\zeta(t) |Au^{(j)}(t)|^2 \leqslant c_j \Big(\sum_{k=1}^{j-1} \|u^{(j-k)}(t)\| \, |Au^{k}(t)| \Big) |Au^{(j)}(t)| .$$

De l'inégalité de Young et de $\zeta(t) \geqslant \zeta_1$, $\forall t \geqslant t_1$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\|u^{(j)}(t)\|^2 + \nu\zeta_1 |Au^{(j)}(t)|^2 \leqslant c_j' \Big(\sum_{k=1}^{j-1} \|u^{(j-k)}(t)\|^2 \, |Au^{(k)}(t)|^2 \Big), \quad \forall t \geqslant t_1 .$$

Des inégalités (4.27), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}\|u^{(j)}(t)\|^2 + \nu\zeta_1 |Au^{(j)}(t)|^2 \leqslant c_j'' \exp[-2\nu\lambda_1\xi_1(t-t_1)], \quad \forall t \geqslant t_1$$

et donc, après intégration

$$\|u^{(j)}(t)\| \leqslant k_{j,1} \exp\left[-\nu\lambda_1 \frac{\zeta_1}{2} (t - t_1) \right] , \quad \forall t \geqslant t_1 . \quad \square$$

Démonstration du Lemme 4.10. – Soit $j \geqslant 1$.

Précisons l'inégalité (3.29) dans le cas particulier $f \equiv 0$ et $(X_1, X_2) = (H, V)$ $(j \longrightarrow j+1)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^{(j+1)}(t)|^2 + \nu\|u^{(j+1)}(t)\|^2 \leqslant c_0\|u(t)\|\,\|u^{(j+1)}(t)\|^2 + c_j\Big(\sum_{k=1}^{j}\|u^{(j+1-k)}(t)\|\,\|u^{(k)}(t)\|\Big)\|u^{(j+1)}(t)\|.$$

Soit, d'après (4.7) et l'inégalité de Young

$$\frac{d}{dt}|u^{(j+1)}(t)|^2 + \nu\xi_1\|u^{(j+1)}(t)\|^2 \leqslant c_j'\Big(\sum_{k=1}^{j}\|u^{(j+1-k)}(t)\|^2\,\|u^{(k)}(t)\|^2\Big)\,, \quad \forall t \geqslant t_1\,. \tag{4.37}$$

Des inégalités (4.31) pour $j > 1$ et de (4.21) pour $j = 1$, nous déduisons que

$$c_j'\Big(\sum_{k=1}^{j}\|u^{(j+1-k)}(t)\|^2\,\|u^{(k)}(t)\|^2\Big) \leqslant c_j''\begin{cases}\exp[-4\nu\lambda_1\xi_1(t-t_1)] & \text{si} \quad j=1\\ \exp[-\nu\lambda_1\min(2\xi_1, 3\zeta_1)(t-t_1)] & \text{si} \quad j>1\,.\end{cases} \tag{4.38}$$

Or, d'après (4.25), nous avons $-3\zeta_1 + \xi_1 > 0$ et donc intégrant l'inégalité (4.37) où le second membre est donné par (4.38), nous obtenons

$$|u^{(j+1)}(t)| \leqslant k_{j+1,0}\exp\left[-\nu\lambda_1\frac{\xi_1}{2}(t-t_1)\right], \quad \forall t \geqslant t_1\,. \qquad \square$$

Démonstration du Lemme 4.11. – Soit $j \geqslant 1$.

La fonction $u^{(j)}$ est donnée par $\nu Au^{(j)} = -u^{(j+1)} + g^{(j)}$ avec

$$|g^{(j)}(t)| \leqslant c_0\,[\|u(t)\|\,|Au^{(j)}(t)|^2 + |Au(t)|\,\|u^{(j)}(t)\|] + c_j\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\|u^{(j-k)}(t)\|\,|Au^{(k)}(t)|\Big)$$

(cf. (4.36)).

Donc, d'après la définition de ζ,

$$\nu\zeta(t)\,|Au^{(j)}(t)| \leqslant |u^{(j+1)}(t)| + c_j\Big(\sum_{k=1}^{j-1} \|u^{(j-k)}(t)\|\,|Au^{(k)}(t)|\Big) \qquad \forall t \geqslant t_1 .$$

Des hypothèses (4.33), nous déduisons le résultat. □

Remarque 4.12. – Utilisant dans la démonstration des Lemmes (4.9 et 4.10) la formule de Young $2ab \leqslant 2\epsilon a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$ $(0 < \epsilon < 1)$, nous obtenons en fait que, sous la condition (4.25), nous avons dans la Proposition (4.8) : $\forall \epsilon$, $0 < \epsilon < 1$,

$$\begin{cases} |Au^{(j)}(t)| \leqslant k_{j,2}(\epsilon)\exp[-\nu\lambda_1\xi_1(1-\epsilon)(t-t_1)] \quad , \quad \forall t \geqslant t_1 \\ j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{4.39}$$

Dans les Lemmes 4.9 à 4.11, nous avons les mêmes formules avec $\frac{\zeta_1}{2}$ remplacé par $\zeta_1(1-\epsilon)$ et $\frac{\xi_1}{2}$ remplacé par $\xi_1(1-\epsilon)$. Fixant ϵ, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, nous avons alors les inégalités (2.9) avec $\bar{\xi}_1 = \xi_1(1-\epsilon)$. □

Note ajoutée à la correction des épreuves : Après que ce travail ait été accepté pour publication, j'ai eu connaissance d'un résultat similaire au Théorème 2.1 obtenu par J.G. Heywood et R. Rannacher [15].

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Foias, C. Guillope, R. Temam, New a priori estimates for Navier-Stokes equations in dimension 3, *Comm. in Part. Diff. Eq.*, 6 (1981), 329-359.

[2] C. Foias, G. Prodi, Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 39 (1967), 1-34.

[3] C. Foias, J.C. Saut, Limite du rapport de l'enstrophie sur l'énergie pour une solution faible des équations de Navier-Stokes, *C.R.A.S.*, 293, série I (1981), 241-244 et *Séminaire du Collège de France*, éditions Pitman, à paraître.

[4] C. Foias, R. Temam, Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations, *J. Math. pures et appl.*, 58 (1979), 339-368.

[5] C. Guillope, Remarques à propos du comportement, lorsque $t \longrightarrow +\infty$, des solutions des équations de Navier-Stokes associées à une force nulle, à paraître.

[6] O.A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flows*, Gordon and Breach, New York, 1963.

[7] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, 63 (1934), 193-248.

[8] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod – Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[9] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, I, Dunod, Paris, 1968.

[10] L. Tartar, communication personnelle.

[11] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[12] R. Temam, Navier-Stokes Equations and Nonlinear Analysis, *Proceedings of the NSF/CBMS Regional Conference*, Dekalb, 1981, à paraître.

[13] R. Temam, Behaviour at time $t = 0$ of the solutions of semi-linear evolution equations, *Journ. Diff. Eq.*, 43 (1982), 73-83.

[14] J.G. HEYWOOD, The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions, *Ind. U. Math. J.*, 29 (1980), 639-681.

[15] J.G. HEYWOOD, R. RANNACHER, Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part I: Regularity of solutions and second-order estimates for spatial discretization, *SIAM J. Num. An.*, 19 (1982), 275-311.

Manuscrit reçu le 1er décembre 1981.

Colette GUILLOPE,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 – Orsay Cedex.

Remarques à propos du comportement, lorsque $t \to +\infty$, des solutions des équations de Navier-Stokes associées à une force nulle.

C. GUILLOPE

à paraître
dans Bull. Soc. Math. France,
111, fasc. II (1983).

Dans cet article, nous donnons des extensions d'un résultat de C. Foias et J.C. Saut ([1]-[2]), relatif au comportement, lorsque $t \to +\infty$, des solutions des équations de Navier-Stokes dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$, N = 2 ou 3, associées à une force nulle (ou, ce qui reviendrait au même, à une force dérivant d'un potentiel) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u.\nabla)u + \text{grad } p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \times [0,\infty[\ , \tag{0.1}$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \times [0,\infty[\ , \tag{0.2}$$

$$u(0) = u^o \quad \text{dans } \mathcal{O} \ , \tag{0.3}$$

munies des conditions au bord

$$u_{|\Gamma_i} = u_{|\Gamma_{N+i}} \ , \ i = 1,\ldots,N, \tag{0.4}$$

si $\mathcal{O}$ est le cube Q de côtés de longueur $L > 0$, Γ_i et Γ_{N+i} désignant deux faces opposées du bord de Q, ou

$$u_{|\Gamma} = 0, \tag{0.5}$$

si $\mathcal{O}$ est un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière Γ très régulière (de classe $\mathcal{C}^\infty$). La viscosité $\nu > 0$ et la vitesse initiale u^o sont données ; les inconnues du problème sont le vecteur vitesse u et la

pression p. Dans le cas où $\mathcal{O} = Q$, u désigne en fait la restriction à Q d'un vecteur vitesse, solution des équations (0.1)-(0.3) sur $\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[$, périodique de période Q.

Dans les deux exemples de conditions au bord considérés, les solutions des équations de Navier-Stokes possèdent, en général, les mêmes propriétés (sauf, sûrement, celles relatives à une couche limite le long du bord de $\mathcal{O}$). Le cas "$\mathcal{O} = Q$" est étudié ici, car, bien que ne représentant pas une situation physique, il se pose dans un cadre fonctionnel qui permet de formuler et de montrer très simplement les propriétés qui nous intéressent.(1)

J. Leray ([8],[9]) a montré que le Problème (0.1)-(0.3), (0.4) ou (0.5) admet une solution définie, régulière et unique sur l'intervalle $]0,+\infty[$ si N = 2, ou sur un intervalle $(t_o,+\infty)$ si N = 3 ; l'instant t_o est choisi "assez grand" et dépend de la donnée initiale u^o, de la viscosité ν et de l'ouvert $\mathcal{O}$. De plus, lorsque $t \to +\infty$, cette solution vérifie une propriété de stabilité, dans le sens où elle décroît de façon au moins exponentielle (cf. aussi J.L. Lions [10], R. Temam [11],[13]).

C. Foias et J.C. Saut ([1],[2]) ont récemment précisé cette propriété : ils ont montré que la décroissance de la solution est, pour certaines normes, exactement exponentielle et que le taux de décroissance est caractérisé par une valeur propre de l'opérateur de Stokes A. Précisément,

Théorème. (C. Foias, J.C. Saut [1],[2]). *Soit* $u^o \in H$. *Pour toute solution non nulle des équations* (0.1)-(0.4) *ou* (0.5), *il existe une valeur propre* $\Lambda = \Lambda(u)$ *de l'opérateur de Stokes* A *telle que*

$$(0.6) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2} = \Lambda,$$

$$(0.7) \qquad \liminf_{t\to+\infty} \frac{|(A-\Lambda)u(t)|}{|u(t)|} = 0,$$

$$(0.8) \qquad \lim_{t\to+\infty} (I-R_\Lambda) \frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \quad \text{dans } V.$$

De plus, lorsque $\mathcal{O} = Q$, *le comportement de la solution* u *pour* $t\to+\infty$, *peut être précisé ainsi :*

$$(0.9) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2} = \Lambda,$$

$$(0.10) \qquad \lim_{t\to+\infty} (A-\Lambda) \frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \quad \text{dans } H,$$

$$(0.11) \qquad \lim_{t\to+\infty} (I-R_\Lambda) \frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \quad \text{dans } D(A)^{(2)} .$$

Ci-dessus, et dans la suite, H désigne l'espace des fonctions de $\mathbb{L}^2(\mathcal{O}) = L^2(\mathcal{O})^N$, à divergence nulle, vérifiant

$$\int_{\mathcal{O}} u\,dx = 0, \quad u.n_{|\Gamma_i} = -\,u.n_{|\Gamma_{N+i}} \quad , \ i = 1,\dots,N, \ \text{si } \mathcal{O} = Q,$$

ou

$$u.n_{|\Gamma} = 0 \quad \text{si } \mathcal{O} = \Omega,$$

muni de la norme $|.|$ de $\mathbb{L}^2(\mathcal{O}) = L^2(\mathcal{O})^N$. V désigne l'espace de restrictions à Q de fonctions périodiques, de période Q, de moyenne nulle sur Q, qui sont dans $\mathbb{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^N) = H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)^N$ si $\mathcal{O} = Q$ (resp. l'espace des fonctions de $\mathbb{H}^1_o(\mathcal{O}) = H^1_o(\mathcal{O})^N$ si $\mathcal{O} = \Omega$), à divergence nulle, muni de la norme du gradient dans $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$, soit $\|.\|$. P désigne la

projection de H sur $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$; $A = -P.\Delta$ désigne l'opérateur de Stokes, linéaire, non borné dans H et R_Λ la projection de H sur le sous-espac propre associé à la valeur propre Λ de A. Enfin, B désigne la forme linéaire de $V \times D(A)$ sur H définie par $B(u,v) = P(u.\nabla)v$, $\forall\ (u,v) \in V \times D($

Le résultat du Théorème 0.1 admet de nombreuses conséquences (cf. [1]-[2]). La plus simple d'entre elles est que la décroissance de la fonction u dans H lorsque $t \to +\infty$ est exactement celle de la fonction $t \to \exp(-\nu\Lambda t)$ (cf. aussi le § I-1 ci-après).

Dans cet article, nous donnons deux types d'extension du Théorème 0.1 : nous montrons que

(a) si $\mathcal{O} = Q$, les divers quotients de deux normes successives $|A^{(m+1)/2}u|$ / $|A^{m/2}u|$ de la solution u convergent vers la même limite $\Lambda^{1/2}$ et les limites (0.10)-(0.11) sont vraies dans $V_m = D(A^{m/2})$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$;

(b) si $\mathcal{O} = \Omega$, le même type de résultats que ceux montrés en (a) sont vrais ; en particulier, les propriétés (0.9)-(0.11) sont vérifiées. Par contre comme, en général, u(t) n'appartient pas à $D(A^{m/2})$ pour $m > 3$, les convergences obtenues ont lieu dans les espaces $E_m = \mathbb{H}^m(\mathcal{O}) \cap H$.

Plan.

I. Cas des équations de Navier-Stokes périodiques en espace.

1. Enoncé des principaux résultats.

2. Remarques préliminaires.

3. Fin de la démonstration du Théorème 1.1.

II. Cas des équations de Navier-Stokes dans un domaine borné.

1. Enoncé des principaux résultats.

2. Démonstrations du Théorème 2.1 et du Corollaire 2.2.

3. Démonstration du Lemme 2.4.

Je remercie C. Foias et J.C. Saut d'avoir attirer mon attention sur

I. Cas des équations de Navier-Stokes périodiques en espace.

1. Enoncé des principaux résultats.

Soit $]0,L[^N$ le cube de $\mathbb{R}^N$ ($L>0$, $N=2$ ou 3). Soit u une solution des équations de Navier-Stokes périodiques en espace, définie, régulière, et non nulle[(3)] pour $t \geq t_o$: u est la solution de l'équation différentielle abstraite,

$$(1.1)\quad \begin{cases} u \in \mathscr{C}^\infty\ (t_o,+\infty;\ \bigcap_{m=0}^{\infty} D(A^{m/2})), \qquad u(t) \neq 0\ \forall\ t \geq t_o\ , \\ u' + \nu Au + B(u) = 0\ , \\ u(0) = u^o \qquad (u^o \in H \text{ donné}). \end{cases}$$

Les espaces $V_m = D(A^{m/2})$ sont munis de la norme $|.|_m = |A^{m/2}.|$ et du produit scalaire associé $(.,.)_m$. Nous noterons aussi $|.|$ la norme sur $H = V_o$, $\|.\|$ la norme sur $V = V_1$ et $(.,.)$, $((.,.))$ les produits scalaires associés (cf. par exemple R. Temam [13] , pour la définition précise des espaces fonctionnels associés aux équations de Navier-Stokes périodiques en espace).

Nous montrons que, pour toute solution u des équations de Navier-Stokes périodiques en espace, il existe un sous-espace propre de A, tel que la fonction vectorielle $\frac{u(t)}{|u(t)|}$ se trouve concentrée sur ce sous-espace pour $t \to +\infty$. Nous en déduisons des informations sur l'ordre de la décroissance exponentielle vers 0 de la fonction u pour $t \to +\infty$.

Notons R_λ la projection orthogonale de H, V,... sur le sous-espace propre associé à une valeur propre λ de A.

Les résultats obtenus par C. Foias et J.C. Saut et rappelés dans l'Introduction sont vrais aussi dans les espaces de fonctions très régulières. Précisément, nous allons montrer ceci :

Théorème 1.1. *Pour toute solution* u *de* (1.1), *il existe une valeu*
propre $\Lambda = \Lambda(u)$ *de l'opérateur* A *telle que*

$$(1.2) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{|u(t)|_m^2}{|u(t)|^2} = \Lambda^m,$$

$$(1.3) \qquad \lim_{t\to+\infty} (A-\Lambda) \frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \quad \textit{dans } V_m,$$

$$(1.4) \qquad \lim_{t\to+\infty} (I-R_\Lambda) \frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \quad \textit{dans } V_m,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

La démonstration de ce résultat est un peu longue et est effectuée dans les paragraphes suivants. Nous en donnons maintenant une conséquence.

Corollaire 1.2. *Il existe un vecteur propre (non nul)* w_Λ *de* A, *associé à la valeur propre* Λ, *tel que*

$$(1.5) \qquad \lim_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t} u(t) = w_\Lambda \quad \textit{dans } V_m,$$

$$(1.6) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{|u(t)|} = \frac{w_\Lambda}{|w_\Lambda|} \quad \textit{dans } V_m,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration du Corollaire 1.2.

(a) De (1.2), nous déduisons que

$$(1.7) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}|u(t)|_m}{t} = -\nu\Lambda \quad , \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Il suffit de montrer que (1.7) est vraie pour m = 0. De l'égalité d'énergie usuelle

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\,||u(t)||^2 = 0, \quad \forall\, t \geq t_o,$$

nous déduisons par intégration que

$$\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}|u(t)| = \frac{1}{t}\,\mathrm{Log}|u(s)| - \frac{\nu}{t}\left[\int_s^t \frac{\|u(\tau)\|^2}{|u(\tau)|^2}\,d\tau\right],$$

pour tous s et t tels que $t_o \leqq s \leqq t$. Faisant tendre t vers $+\infty$, nous en déduisons (1.7) pour m=0, puis pour tout $m \in \mathbb{N}$ d'après (1.2).

Dans la suite, nous fixons $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0,\frac{1}{2}[$. D'après (1.7), il existe un instant $t_\varepsilon \geqq t_o$ tel que

$$(1.8) \qquad \exp(-\nu(\Lambda+\varepsilon)t) \leqq |u(t)|_{m+2} \leqq \exp(-\nu(\Lambda-\varepsilon)t), \ \forall\ t \geqq t_\varepsilon .$$

(b) Notons $u_\Lambda = R_\Lambda u$. Montrons que $\lim_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t} u_\Lambda(t)$ existe dans V_m et est non nulle. L'équation différentielle vérifiée par la fonction u_Λ est obtenue en projetant l'équation (1.1) sur le sous-espace propre associé à la valeur propre Λ :

$$\frac{du_\Lambda}{dt} + \nu\Lambda u_\Lambda + R_\Lambda B(u) = 0 \ ;$$

or, d'après (1.8) et la continuité de $R_\Lambda B$ de $V_{m+2} \times V_{m+2}$ dans V_m, la fonction $t \to e^{\nu\Lambda t} R_\Lambda B(u(t))$ appartient à l'espace $L^1(t_o,+\infty;V_m)$. La fonction u_Λ est donc donnée par

$$(1.9) \qquad u_\Lambda(t)e^{\nu\Lambda t} = u_\Lambda(s)e^{\nu\Lambda s} - \int_s^t e^{\nu\Lambda\tau} R_\Lambda B(u(\tau))d\tau, \quad \forall\ s,t, t_o \leqq s \leqq t ,$$

ce qui montre que $\lim_{t\to+\infty} u_\Lambda(t)e^{\nu\Lambda t}$ existe dans V_m.

Supposons que cette limite soit nulle. Alors, de (1.9), nous déduisons que

$$u_\Lambda(s) = e^{-\nu\Lambda s}\left[\int_s^{+\infty} e^{\nu\Lambda\tau} R_\Lambda B(u(\tau))d\tau\right], \ \forall\ s \geqq t_o .$$

Donc, d'après (1.8),

$$(1.10) \qquad |u_\Lambda(s)|_m \leqq \frac{c}{\nu(\Lambda-2\varepsilon)} \exp\left[-2\nu(\Lambda-\varepsilon)s\right], \quad \forall\ s \geqq t_\varepsilon .$$

Mais, d'après (1.4), les fonctions $|u|_m$ et $|u_\Lambda|_m$ sont équivalentes et donc, d'après (1.7),

$$\text{Log } |u_\Lambda(t)|_m \underset{t\to+\infty}{\sim} -\nu\Lambda t \ ;$$

La fonction $t \to \text{Log } (|u_\Lambda(t)|_m \exp(2\nu(\Lambda-\varepsilon)t))$ est donc équivalente, pour $t\to+\infty$, à la fonction non bornée $t \to \nu(\Lambda-2\varepsilon)t$, ce qui contredit l'estimation (1.10).

Donc, la fonction $t \to e^{\nu\Lambda t} u_\Lambda(t)$ converge dans V_m, lorsque $t\to+\infty$, vers un vecteur propre non nul de A, associé à la valeur propre Λ, soit w_Λ, et nous avons

$$u_\Lambda(t) = e^{-\nu\Lambda t} w_\Lambda + e^{-\nu\Lambda t}\left[\int_t^{+\infty} e^{\nu\Lambda\tau} R_\Lambda B(u(\tau))d\tau\right] \quad \forall\ t\geq t_o.$$

La fonction $t \to e^{\nu\Lambda t} u(t)$ admet donc une limite non nulle. Mais de (1.4), nous déduisons aussi que

$$\lim_{t\to+\infty} (u(t) - u_\Lambda(t))e^{\nu\Lambda t} = 0 \text{ dans } V_m.$$

Lorsque $t\to+\infty$, la fonction $t \to e^{\nu\Lambda t} u(t)$ converge donc dans V_m vers le vecteur propre (non nul) w_Λ de A associé à la valeur propre Λ. Cela montre (1.5) et (1.6).

Remarque 1.3. Nous avons montré que la fonction $u_\Lambda = R_\Lambda u$ converge vers 0 exactement comme la fonction $t \to \exp(-\nu\Lambda t)$. Notant $u_i = R_{\lambda_i} u$ la projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i, nous pouvons montrer de façon similaire à ce qui précède :

(a) si $\lambda_i<\Lambda$, alors la fonction u_i décroît vers 0 au moins comme $t \to \exp(-2\nu\Lambda t)$;

(b) si $\Lambda<\lambda_i<2\Lambda$, alors la fonction u_i décroît vers 0 éventuellement comme $t \to \exp(-\nu\lambda_i t)$, sinon comme $t \to \exp(-2\nu\Lambda t)$;

(c) si $\lambda_i \geq 2\Lambda$, alors la fonction u_i décroît vers 0 en général comme $t \to \exp(-2\nu\Lambda t)$.

(cf. C. Foias, J.C. Saut [1],[2],[15]).

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration du Théorème 1.1.

2. Remarques préliminaires.

Soit Λ ($\geq\lambda_1$) une valeur propre de l'opérateur de Stokes : nous désignons par Λ_o la valeur propre immédiatement inférieure à Λ, si elle existe, et par Λ_1 la valeur propre immédiatement supérieure à Λ. Nous notons P_Λ (resp. R_Λ) la projection orthogonale de H sur le sous-espace propre associé à toutes les valeurs propres inférieures ou égales à Λ (resp. associé à la valeur propre Λ).

Soit u une solution du Problème (1.1) définie et régulière pour $t \geq t_o$. Ecrivons u sous la forme $u = p + R_\Lambda u + q$ avec

$$(1.11) \qquad q = (I-P_\Lambda)u, \quad p = 0 \text{ si } \Lambda = \lambda_1, \quad = P_{\Lambda_o} \text{ si } \Lambda > \lambda_1.$$

Notons

$$(1.12) \qquad \rho_m = \frac{|u|^2_{m+1}}{|u|^2_m} \quad , \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \, ,$$

$$\chi = \frac{|q|^2}{|u|^2} \quad , \qquad \xi = \frac{|p|^2}{|u|^2} \quad ;$$

ces fonctions sont définies et régulières sur $[t_o, +\infty[$ et vérifient

$$(1.13) \qquad |p|^2_{m+1} \leq \Lambda_o |p|^2_m \, , \; \Lambda_1 |q|^2_m \leq |q|^2_{m+1} \, , \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$(1.14) \qquad \lambda_1 \leq \rho_o \leq \rho_1 \leq \ldots \quad , \; 0 \leq \xi \leq 1, \; 0 \leq \chi \leq 1.$$

2.1. Remarquons que, pour montrer le Théorème 1.1, il suffit de montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \rho_m(t) = \Lambda, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \tag{1.15}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \left[\xi(t) + \chi(t)\right] = 0. \tag{1.16}$$

En effet, effectuant une récurrence sur m pour montrer la propriété (1. 4), nous devons montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|R_\Lambda u|_{m-1}}{|u|_{m-1}} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{|R_\Lambda u|_m}{|u|_m} = 1. \tag{1.17}$$

Or, nous avons

$$\frac{|R_\Lambda u|_m}{|u|_m} = \frac{\Lambda^{1/2}|R_\Lambda u|_{m-1}}{|u|_{m-1}} \quad \frac{|u|_{m-1}}{|u|_m}, \tag{1.18}$$

ce qui, avec (1.15), montre la propriété (1.17).

De la même façon, pour montrer la propriété (1.3), nous effectuons une récurrence sur m en utilisant les relations :

$$\begin{cases} \left|(A-\Lambda)\dfrac{u}{|u|}\right|_m = \Lambda^{1/2}\left|(A-\Lambda)\dfrac{u}{|u|}\right|_{m-1}, \\ \left|(A-\Lambda)\dfrac{u}{|u|}\right|^2 = \rho_1\rho_o - 2\Lambda\rho_o + \Lambda^2 . \end{cases} \tag{1.19}$$

Remarque 1.4. La relation (1.18) avec m=0,1,2 est aussi vraie dans le cas où u est solution des équations de Navier-Stokes sur un ouvert Ω régulier, car $u(t) \in D(A)$, pour tout $t \geq t_o$.

2.2. Inégalités différentielles vérifiées par les fonctions ρ_m, ξ, χ .

Montrons que, sur l'intervalle $[t_o, +\infty[$,

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \nu \frac{|(A-\rho_m)u|_m^2}{|u|_m^2} \leq \frac{1}{\nu} \frac{|B(u)|_m^2}{|u|_m^2}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \tag{1.20}$$

$$\frac{d\chi}{dt} + \nu \frac{\|q\|^2 - \chi\|u\|^2}{|u|^2} \leq \frac{1}{\nu(\Lambda_1-\Lambda)} \frac{|B(u)|^2}{|u|^2}, \tag{1.21}$$

$$(1.22)\qquad \frac{d\xi}{dt} - \nu\frac{\xi\,\|u\|^2 - \|p\|^2}{|u|^2} \geq -\frac{1}{\nu(\Lambda-\Lambda_o)}\,\frac{|B(u)|^2}{|u|^2}\,,$$

(a) Soit $m\in\mathbb{N}$. De l'équation (1.1) et de l'identité,

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho_m}{dt} = \frac{1}{|u|_m^2}\left[\frac{du}{dt}\,,\ (A-\rho_m)u\right]_m\,,$$

nous déduisons que

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho_m}{dt} + \nu\frac{|(A-\rho_m)u|_m^2}{|u|_m^2} = -\left[\frac{B(u)}{|u|_m}\,,\ (A-\rho_m)\frac{u}{|u|_m}\right]_m$$

Utilisant l'inégalité de Schwarz, nous en déduisons l'inégalité (1.20).

(b) De l'équation (1.1) et de l'identité

$$\frac{1}{2}\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{|u|^2}\left[\frac{du}{dt}\,,\ q-\chi u\right]\,,$$

nous déduisons que

$$(1.23)\qquad \frac{1}{2}\frac{d\chi}{dt} + \frac{\nu}{|u|^2}\left(\|q\|^2 - \chi\|u\|^2\right) = -\left[\frac{B(u)}{|u|}\,,\ \frac{q-\chi u}{|u|}\right]$$

Mais, d'après la définition de Λ_1, nous avons l'inégalité

$$(1.24)\qquad \|q\|^2 - \chi\|u\|^2 \geq (\Lambda_1-\Lambda)|q-u|^2.$$

En effet, comme $u = P_\Lambda u+q$, nous avons

$$\|q\|^2 - \chi\|u\|^2 = (1-\chi)\|q\|^2 - \chi\|P_\Lambda u\|^2,$$

puis, d'après (1.13),

$$(1.25)\qquad \|q\|^2 - \chi\|u\|^2 \geq \Lambda_1(1-\chi)|q|^2 - \Lambda\chi|P_\Lambda u|^2\ ;$$

calculant le second membre de l'égalité ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Lambda_1(1-\chi)|q|^2 - \Lambda\chi|P_\Lambda u|^2 &= (\Lambda_1(1-\chi) + \Lambda\chi)|q|^2 - \Lambda\chi|u|^2\\ &= (\Lambda_1-\Lambda)(1-\chi)|q|^2\\ &= (\Lambda_1-\Lambda)|q-\chi u|^2\ ;\end{aligned}$$

ce qui avec (1.25) donne l'inégalité (1.24).

De (1.23)-(1.24), nous déduisons l'inégalité (1.21).

(c) Nous procédons de la même façon pour la fonction ξ : au lieu de l'inégalité (1.24), nous utilisons l'inégalité

$$(1.26) \qquad \|p\|^2 - \xi \|u\|^2 \leq - (\Lambda-\Lambda_o)|p - \xi u|^2.$$

Remarque 1.5. Les inégalités (1.20) pour m=0 et (1.21)-(1.22) sont vérifiées dans le cas où u est une solution des équations de Navier-Stokes non périodiques. □

3. Fin de la démonstration du Théorème 1.1.

La démonstration de (1.15) se fait par récurrence sur m.

3.1. Le principe de la démonstration est le suivant : nous explicitons une fonction Φ_m, positive, intégrable sur un certain intervalle $(t_1, +\infty)$, telle que

$$(1.27) \qquad \frac{1}{\nu} \frac{|B(u)|_m^2}{|u|_m^2} \leq \rho_m \Phi_m ;$$

par intégration de l'inégalité (1.14), nous déduisons que

$$(1.28) \qquad \lambda_1 \leq \rho_m(t) \leq \rho_m(s) \exp \left(\int_s^{+\infty} \Phi_m(\tau) d\tau\right),$$

pour tous s,t, $t_1 \leq s \leq t$. Utilisant dans (1.28) la limite supérieure pour $t \to +\infty$, puis la limite inférieure pour $s \to +\infty$, nous voyons que $\lim_{t \to +\infty} \rho_m(t)$ existe et est supérieure ou égale à λ_1. Nous déduisons aussi de (1.20) que la fonction $(A-\rho_m) \frac{u}{|u|_m}$ appartient à l'espace $L^2(t_1, +\infty ; V_m)$.

Notons $\overline{\rho_o} = \operatorname{Sup}_{t \geq t_o} (\rho_o(t))$. Intégrant les inégalités (1.21)-(1.22), nous obtenons

$$
(1.29)\qquad
\begin{aligned}
&0 \leq \chi(t) \leq \chi(s) + \frac{\overline{\rho_o}}{\nu(\Lambda_1-\Lambda)}\left[\int_s^{+\infty} \Phi_o(\tau)\,d\tau\right], \\
&\xi(s) - \frac{\overline{\rho_o}}{\nu(\Lambda-\Lambda_o)}\left[\int_s^{+\infty} \Phi_o(\tau)\,d\tau\right] \leq \xi(t) \leq 1,
\end{aligned}
$$

pour tous s et t vérifiant $t_1 \leq s \leq t$. Appliquant à (1.29) la $\limsup_{t\to+\infty}$, puis la $\liminf_{s\to+\infty}$, nous déduisons que $\lim_{t\to+\infty} \chi(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} \xi(t)$ existent et sont comprises entre 0 et 1. Enfin, des inégalités (1.15)-(1.16), nous déduisons aussi que les fonctions

$$\frac{\|q\|^2 - \chi\,\|u\|^2}{|u|^2} \quad \text{et} \quad \frac{\xi\,\|u\|^2 - \|p\|^2}{|u|^2} \quad \text{sont intégrables sur } (t_1,+\infty).$$

3.2. Démarrage de la récurrence : étude du cas m=0.

L'application B est bilinéaire continue de $V\times D(A^{3/4})$ dans H, et

$$
(1.30)\qquad \frac{1}{\nu}\,\frac{|B(u)|^2}{|u|^2} \leq C_o\,\rho_o\,\|u\|\,|Au|.
$$

Montrons que la fonction $\Phi_o = C_o\,\|u\|\,|Au|$ est intégrable sur l'intervalle $(t_o,+\infty)$. La fonction u, solution régulière des équations de Navier-Stokes sur l'intervalle $(t_o,+\infty)$, vérifie

$$
(1.31)\qquad
\begin{cases}
2\nu\left[\int_s^t \|u(\tau)\|^2 d\tau\right] = |u(s)|^2 - |u(t)|^2, \\
2\nu\left[\int_t^{+\infty} \|u(\tau)\|^2 d\tau\right] = |u(t)|^2,
\end{cases}
$$

$$
(1.32)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u(t)\|^2 + \nu\left(1 - \frac{C_o^{1/2}}{\nu}|u(t)|^{1/2}\|u(t)\|^{1/2}\right)|Au(t)|^2 \leq 0,
$$

pour tous s, t, $t_o \leq s \leq t$.

Soit $t_1 > \frac{C_o}{2\nu^3}\,\lambda_1^{-1/2}\,|u^o|^2$. La première relation (1.31) implique que $u(t_1) \in V$ et $\|u(t_1)\| < \frac{\nu}{C_o^{1/2}}\,\lambda_1^{1/4}$. De (1.32), nous

déduisons que l'application $||u(.)||$ est décroissante sur $[t_1,+\infty]$. Posant

$$\frac{1}{\kappa_o} = \frac{2\nu}{C_o}\left(1 - \frac{C_o^{1/2}}{\nu}\lambda_1^{-1/4}\|u(t_1)\|^{1/2}\right)$$

nous déduisons aussi de (1.32) que

$$(1.33)\quad \nu\left[\frac{C_o}{2\nu\kappa_o}\right]^2\left[\int_t^{+\infty}|Au(\tau)|^2 d\tau\right] \leq \frac{1}{2}\|u(t)\|^2, \quad \forall\, t\geq t_1$$

De (1.31)-(1.33), nous déduisons que la fonction Φ_o est intégrable sur $(t_1,+\infty)$, et donc sur $(t_o,+\infty)$.

D'après le § 3.1, $\Lambda = \lim_{t\to+\infty}\rho_o(t)$ existe et la fonction $\left|(A-\rho_o)\frac{u}{|u|}\right|^2$ est intégrable sur $(t_o,+\infty)$: donc il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$, telle que

$$(1.34)\quad \lim_{n\to+\infty}\left|(A-\rho_o(t_n))\,\frac{u(t_n)}{|u(t_n)|}\right|^2 = 0.$$

Donc le vecteur $v(t_n) = \dfrac{u(t_n)}{|u(t_n)|}$ est borné dans $D(A)$: il existe un vecteur $\bar{v}$ et une sous-suite, encore notée (t_n), tels que $\lim_{n\to+\infty} v(t_n) = \bar{v}$ dans $D(A)$ faible. Or d'après (1.34), $|(A-\Lambda)v(t_n)|$ converge vers 0. Donc, la limite $\bar{v}$ vérifie

$$(A-\Lambda)\,\bar{v} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{v} \neq 0\ ;$$

Λ est donc une valeur propre de A et $\bar{v}$ est un vecteur propre associé à Λ.

Nous déduisons aussi du § 3.1 que $\lim_{t\to+\infty}\chi(t)$ et $\lim_{t\to+\infty}\xi(t)$ existent et que les fonctions $\dfrac{\|q\|^2 - \chi\|u\|^2}{|u|^2}$ et $\dfrac{\xi\|u\|^2 - \|p\|^2}{|u|^2}$

sont intégrables sur $(t_o,+\infty)$: il existe donc une suite, encore notée $(t_n)_{n\geq 0}$, tendant vers $+\infty$, telle que

$$(1.35)\qquad \lim_{n\to+\infty} \chi(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\| q(t_n) \|^2}{\| u(t_n) \|^2},\ \lim_{n\to+\infty} \xi(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\| p(t_n) \|^2}{\| u(t_n) \|^2}$$

Mais, d'après (1.18) et (1.20), nous avons

$$(\Lambda_1-\Lambda)(1-\chi)\chi \leq \frac{\| q \|^2 - \chi \| u \|^2}{|u|^2}$$

$$(\Lambda-\Lambda_o)(1-\xi)\xi \leq \frac{\xi \| u \|^2 - \| p \|^2}{|u|^2} \quad ;$$

de (1.35), nous déduisons alors que les limites, pour $t\to+\infty$, des fonctions χ et ξ sont égales à 0 ou 1.

Supposant que $\lim_{t\to+\infty} \chi(t) = 1$, nous déduisons de (1.13) que

$$\Lambda_1 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\| q(t_n) \|^2}{|q(t_n)|^2} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\| q(t_n) \|^2}{\| u(t_n) \|^2} \frac{\| u(t_n) \|^2}{|u(t_n)|^2} \frac{|u(t_n)|^2}{|q(t_n)|^2} \right] = \Lambda ,$$

ce qui contredit la définition de Λ_1. De la même façon, l'hypothèse $\lim_{t\to+\infty} \xi(t) = 1$ contredit la définition de Λ_o.

Remarque 1.6. L'étude précédente, où m=0, est valable sans changement dans le cas où u est une solution des équations de Navier-Stokes non périodiques. Nous avons donc montré que, si u est une solution des équations de Navier-Stokes sur un ouvert borné Ω, alors il existe une valeur propre $\Lambda = \Lambda(u^o)$ de l'opérateur A telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\| u(t) \|^2}{|u(t)|^2} = \Lambda,$$

$$(A-\Lambda)\ \frac{u}{|u|} \in L^2(t_o,+\infty;H),$$

$$\lim_{t\to+\infty}\ (I-R_\Lambda)\ \frac{u}{|u|} = 0 \text{ dans } V.$$

La dernière propriété est déduite de ce qui précède et de la Remarque 1.3. □

3.3. Mise en oeuvre de la récurrence.

Soit $m\geq 1$. Supposons que

$$\lim_{t\to+\infty} \rho_p(t) = \Lambda \quad , \text{ pour } p = 0,\ldots,m-1, \tag{1.36}$$

$$(A-\rho_{m-1})\ \frac{u}{|u|_{m-1}} \in L^2(t_o,+\infty;V_{m-1}) \ . \tag{1.37}$$

Montrons que les propriétés (1.36)-(1.37) sont vérifiées avec m-1 remplacé par m.

D'après les propriétés de continuité (^{4}) de B, nous avons

$$\frac{1}{\nu}\ \frac{|B(u)|_m^2}{|u|_m^2} \leq C_m \begin{cases} \rho_1\ \|u\|\ |Au| & \text{pour } m=1, \\ \rho_m\ \left(\prod_{j=1}^{m-1} \rho_j\right) \|u\|^2 & \text{pour } m\geq 2. \end{cases}$$

Nous avons déjà montré que la fonction $\|u\|\ |Au|$ est intégrable sur $(t_o,+\infty)$ (cas m=1), tandis que pour $m\geq 2$, la fonction $\left(\prod_{j=1}^{m=1} \rho_j\right)$ est bornée sur $(t_o,+\infty)$ d'après l'hypothèse (1.36). Nous avons donc

$$\frac{1}{\nu}\ \frac{|B(u)|_m^2}{|u|_m^2} \leq \rho_m\ \Phi_m \ ,$$

avec $\Phi_m \geq 0$, $\Phi_m \in L^1(t_1,+\infty;V_m)$.

Des propriétés vues au paragraphe 3.1., nous déduisons que

$\lim_{t\to+\infty} \rho_m(t)$ existe et est supérieure ou égale à Λ, tandis que la fonc

tion $(A-\rho_m)\frac{u}{|u|_m}$ appartient à $L^2(t_o,+\infty;V_m)$. Cela montre en particulier la propriété (1.37) avec m-1 remplacé par m.

Par ailleurs, de l'hypothèse (1.37) nous déduisons qu'il existe une suite, notée $(t_n)_{n\geq 0}$, tendant vers $+\infty$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|Au(t_n)|^2_{m-1}}{|u(t_n)|^2_{m-1}} = \Lambda^2 ;$$

cela montre que

$$(1.38) \qquad \lim_{t\to+\infty} \rho_m(t) = \Lambda , \quad \lim_{t\to+\infty} (A-\rho_{m-1}(t))\frac{u(t)}{|u(t)|_{m-1}} = 0 \text{ dans } V_{m-1} ;$$

les propriétés (1.36)-(1.37) sont donc vraies avec m-1 remplacé par m.

Nous avons montré au §3.2 que les propriétés (1.36)-(1.37) sont vraies pour m=1 ; elles sont donc vraies pour tout m. D'après les remarques faites au § 2.1, le Théorème 1.1 est démontré.

□

II. Cas des équations de Navier-Stokes dans un ouvert borné.

1. Enoncé des principaux résultats.

Soit Ω un ouvert borné régulier (de classe $\mathscr{C}^\infty$). Considérons une solution u des équations de Navier-Stokes définie et régulière [3] sur $\Omega \times [t_o,+\infty[$: u est la solution de l'équation différentielle abstraite,

$$(2.1) \quad \begin{cases} u \in \mathscr{C}^\infty(t_o,+\infty; \bigcap_{m=0}^{\infty} E_m) \cap \mathscr{C}^\infty(t_o,+\infty;D(A)) , \\ u' + \nu Au + B(u) = 0 , \\ u(0) = u^o \quad (u^o \in H \text{ donné}). \end{cases}$$

Les espaces $E_m = \mathbb{H}^m(\Omega) \cap H$ sont munis de la norme induite par celle de $\mathbb{H}^m(\Omega)$, notée $\|.\|_m$; le produit scalaire associé est noté $((.,.))_m$ (cf. par exemple, R. Temam [12] pour la définition précise des espaces fonctionnels associés aux équations de Navier-Stokes dans un ouvert Ω).

Nous obtenons ici le même type de résultats que dans le cas périodique, de façon moins directe cependant, à cause de l'existence de conditions au bord : ici nous déduisons des informations sur le comportement de la fonction $u(t) \in E_m$ en étudiant les fonctions dérivées de u par rapport au temps (cf. aussi, A.A. Kiselev et O.A. Ladyzenskaia [7], [6]).

Notant $u_j = u^{(j)}$ la dérivée d'ordre j de la fonction u par rapport au temps ($u_o \equiv u$), nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.1. : *Pour toute solution* u *des équations* (2.1), *il existe une valeur propre* $\Lambda = \Lambda(u)$ *de* A *telle que*

$$(2.2) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_j(t)\|^2}{|u_j(t)|^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|Au_j(t)|^2}{\|u_j(t)\|^2} = \Lambda ,$$

$$(2.3) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{|u_{j+1}(t)|^2}{|u_j(t)|^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_{j+1}(t)\|^2}{\|u_j(t)\|^2} = \nu^2\Lambda^2 ,$$

$$(2.4) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_j(t)\|_{m+1}}{\|u_j(t)\|_m} \quad \textit{existe et est non nulle},$$

$$(2.5) \qquad \lim_{t\to+\infty} (A-\Lambda) \frac{u_j(t)}{|u_j(t)|} = 0 \quad \textit{dans } E_m ,$$

$$(2.6) \qquad \lim_{t\to+\infty} (I-R_\Lambda) \frac{u_j(t)}{|u_j(t)|} = 0 \quad \textit{dans } E_m ,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, *pour tout* $j \in \mathbb{N}$.

De façon tout à fait similaire à celle utilisée au §I-1, nous déduisons de ce résultat des informations sur le comportement, pour $t \to +\infty$, des fonctions u_j.

Corollaire 2.2. *Il existe un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* Λ, *soit* w_Λ, *tel que*

$$(2.7)\quad \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t} u_j(t) = (-\nu\Lambda)^j w_\Lambda \text{ dans } E_m, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u_j(t)}{|u_j(t)|} = \dfrac{w_\Lambda}{|w_\Lambda|} \quad \text{dans } E_m, \end{cases}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, *pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.3. La propriété (2.5) implique en particulier que

$$(2.8)\qquad \lim_{t\to+\infty} (I-R_\Lambda)\frac{u_j(t)}{|u_j(t)|} = 0 \quad \text{dans } D(A).$$

Les fonctions $|AR_\Lambda u_j|$ et $|Au_j|$ sont donc équivalentes lorsque $t \to +\infty$. Cette propriété est réalisée aussi bien dans le cas des équations de Navier-Stokes périodiques en espace que dans celui des équations de Navier-Stokes dans un ouvert borné Ω.

Les résultats énoncés ici sont démontrés au cours des paragraphes suivants.

2. Démonstration du Corollaire 2.2. et du Théorème 2.1.

2.1. Préliminaires. Soit u une solution des équations de Navier-Stokes : la fonction u converge très rapidement vers 0 quand $t \to +\infty$. Précisément, il est établi en [3] (cf. aussi J. Heywood [5]) :

Lemme 2.3. *Il existe* $t_o \geq 0$, $\xi_o > 0$ *et des constantes* K_j *positives telles que*

$$|Au_j(t)| \leq K_j \exp\left[-\nu\xi_o(t-t_o)\right], \quad \forall\, t \geq t_o,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Nous avons montré au § I.3.2. que $\Lambda = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2}$ existe et est égale à une valeur propre de A, que la fonction $(A-\rho_o)\dfrac{u}{|u|}$ appartient à l'espace $L^2(t_o,+\infty;H)$ et que

$$\lim_{t\to\infty} (I-R_\Lambda)\frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \text{ dans } V,$$

(cf. Remarque I.2.5.).

Mais, comme ici la fonction u(t) n'appartient pas, en général, à $D(A^{m/2})$ si m>2, la démonstration présentée au §I ne s'applique pas. Nous remarquons tout d'abord que les fonctions dérivées u_j vérifient des propriétés analogues à celles vérifiées par la fonction u et rappelées ci-dessus.

Précisément, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.4. *Les fonctions* u_j, $j \in \mathbb{N}$, *vérifient les propriétés suivantes :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_j(t)\|^2}{|u_j(t)|^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|Au_j(t)|^2}{\|u_j(t)\|^2} = \Lambda, \tag{2.9}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|u_{j+1}(t)|^2}{\|u_j(t)\|^2} = \nu^2\Lambda, \tag{2.10}$$

$$\lim_{t\to+\infty} (I-R_\Lambda)\frac{u_j(t)}{|u_j(t)|} = 0 \text{ dans } H. \tag{2.11}$$

Ce résultat sera montré au § 3. Le Théorème 2.1 en est une conséquence immédiate.

Dans la suite, nous désignons par $C_{j,m}$ $(j=0,1,\ldots,m=0,1,\ldots)$ des constantes dépendant de l'ouvert Ω, éventuellement de ν, mais pas de u.

Soit j un entier positif ou nul. Notant $g_j = (B(u))^{(j)}$, nous remarquons que la fonction u_{j+1} $(\equiv u^{(j+1)})$ vérifie l'équation différentielle

$$u_{j+1} + \nu\, Au_j = g_j, \tag{2.12}$$

où, en particulier, la fonction g_j décroît "très vite" vers 0, dans le sens où

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|g_j(t)|}{\|u_\ell(t)\|} = 0 \text{ , pour tout } \ell = 0,1,2,\ldots \tag{2.13}$$

En effet, utilisant la continuité de la forme bilinéaire de $V\times D(A)$ dans H, nous écrivons

$$\frac{|g_j|}{\|u_\ell\|} \leq C_{j,1} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{\|u_{j-k}\|}{\|u_\ell\|} |Au_k| \quad ;$$

puis des Lemmes 2.3 et 2.4, nous déduisons la propriété (2.13).

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration des propriétés (2.3)-(2.6) et (2.7).

2.2. Démonstration du Corollaire 2.2.

Nous supposons le Théorème 2.1 démontré.

(a) Montrons que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\,\|u_j(t)\|_m}{t} = -\nu\,\Lambda, \quad \forall\, m\in\mathbb{N}, \quad \forall\, j\in\mathbb{N}. \tag{2.14}$$

D'après (2.4), il suffit de montrer que (2.14) est vraie pour m=0. De l'égalité d'énergie

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_j(t)|^2 + \nu\|u_j(t)\|^2 = (g_j(t),\ u_j(t)),\ \forall\ t\geq t_o,$$

nous déduisons par intégration que

$$\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}|u_j(t)| = \frac{1}{t}\,\mathrm{Log}|u_j(s)| - \frac{\nu}{t}\int_s^t \frac{\|u_j(\tau)\|^2}{|u_j(\tau)|}\,d\tau$$

$$+ \frac{1}{t}\int_s^t \frac{(g_j(t),u_j(t))}{|u_j(t)|^2}\,d\tau,$$

pour tous s et t tels que $t_o \leq s \leq t$. Mais, d'après (2.13) et le Lemme 2.3, le terme contenant g_j converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{Log}|u_j(t)|}{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\nu}{t}\int_s^t \frac{\|u_j(\tau)\|^2}{|u_j(\tau)|^2}\,d\tau\right) = -\nu\Lambda\ .$$

Nous déduisons alors de la propriété (2.4) que (2.14) est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(b) Notons $u_{\Lambda,j} = R_\Lambda u_j$. Utilisant la Remarque 2.3 nous montrons exactement comme au §I.1 que $\lim_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t}\, u_{\Lambda,j}(t)$ existe dans D(A), et donc dans V_m, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, et est égale à un vecteur propre (non nul) de A associé à la valeur propre Λ, soit $w_{\Lambda,j}$. De la Remarque 2.3 nous déduisons aussi que $\lim_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t}\, u_j(t)$ existe dans D(A) et est égale à $w_{\Lambda,j}$.

Mais, projetant sur le sous-espace propre associé à la valeur propre Λ la dérivée $j^{\text{è}}$ de l'équation (2.1), nous obtenons

$$u_{\Lambda,j+1} + \nu\,\Lambda\, u_{\Lambda,j} = R_\Lambda g_j.$$

Multipliant cette égalité par $e^{\nu\Lambda t}$ et faisant tendre t vers $+\infty$, nous obtenons que

$$w_{\Lambda,j+1} + \nu\,\Lambda\, w_{\Lambda,j} = 0 \text{ dans } V, \text{ donc dans } V_m,\ \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Notant $w_\Lambda = \lim_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t}\, u_\Lambda(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t}\, u(t)$, nous avons donc

$$(2.15)\quad \lim_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t}\, u_{\Lambda,j}(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{\nu\Lambda t}\, u_j(t) = (-\nu\Lambda)^j w_\Lambda \text{ dans } D(A).$$

Nous en déduisons alors que

$$(2.16)\quad \lim_{t\to+\infty} \frac{u_j(t)}{|u_j(t)|} = \frac{w_\Lambda}{|w_\Lambda|} \quad \text{dans } D(A).$$

Puis, effectuant une récurrence sur m, nous déduisons de la propriété (2.5) (resp. (2.6)) que l'égalité (2.16) (resp. (2.15)) est vraie dans E_m, $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

□

2.3. Démonstration des Propriétés (2.2) à (2.4).

Soit $m \geq 2$. Supposons que

$$(2.17)\quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_j(t)\|_p}{\|u_j(t)\|_{p-1}} \text{ existe et est non nulle,}$$

$$(2.18)\quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_{j+1}(t)\|_{p-1}}{\|u_j(t)\|_{p-1}} \text{ existe et est non nulle,}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour $p=1,\ldots,m$.

(a) Ecrivant, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\|u_{j+1}\|_m}{\|u_j\|_m} = \frac{\|u_{j+1}\|_m}{\|u_{j+1}\|_{m-1}} \frac{\|u_{j+1}\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m-1}} \frac{\|u_j\|_{m-1}}{\|u_j\|_m},$$

nous déduisons de (2.17)-(2.18) que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_{j+1}(t)\|_m}{\|u_j(t)\|_m}$ existe et est non nulle : c'est la propriété (2.18) avec $p=m+1$.

(b) Montrons que

$$(2.19)\qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\|Au_j(t)\|_{m-1}}{\|u_j(t)\|_m} = \frac{1}{\nu} \lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_{j+1}(t)\|_{m-1}}{\|u_j(t)\|_m} \quad , \quad \forall\, j\in\mathbb{N}.$$

De l'équation (2.12), nous déduisons que

$$(2.20)\qquad \frac{\nu^2\|Au_j\|^2_{m-1}}{\|u_j\|^2_m} = \frac{\|u_{j+1}\|^2_{m-1}}{\|u_j\|^2_m} - 2\frac{((g_j,u_{j+1}))_{m-1}}{\|u_j\|^2_m} + \frac{\|g_j\|^2_{m-1}}{\|u_j\|^2_m} .$$

Par ailleurs, l'application B est continue de $E_m\times E_m$ dans E_{m-1} (car $m\geq 2$) et donc

$$\frac{\|g_j\|_{m-1}}{\|u_j\|_m} \leq C_{j,m} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{\|u_{j-k}\|_m}{\|u_j\|_m} \|u_k\|_m \quad ,$$

ce qui, d'après le Lemme 2.3 et le point (a) précédent, montre que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\|g_j(t)\|_{m-1}}{\|u_j(t)\|_m} = 0 \quad , \quad \forall\, j\in\mathbb{N}.$$

La propriété (2.19) est alors une conséquence de (2.20).

Comme les normes $\|.\|_{m+1}$ et $\|A.\|_{m+1}$ sont équivalentes sur l'espace E_{m+1} et que la limite du deuxième membre de l'égalité (2.19) existe et est non nulle d'après les hypothèses (2.17)-(2.18), nous avons montré la propriété (2.17) avec p=m+1.

(c) Nous déduisons du Lemme 2.4 les propriétés (2.2)-(2.3); les propriétés (2.17)-(2.18) sont donc vérifiées pour m=2.

Nous avons donc montré, par récurrence, que les propriétés (2.17)(2.18) sont vraies pour tout $p\in\mathbb{N}^*$; cela montre en particulier la propriété (2.4) et la propriété

$$(2.21)\qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\|g_j(t)\|_m}{\|u_\ell(t)\|_p} = 0, \quad \forall\, j,\ell\in\mathbb{N}, \quad \forall\, m,p\in\mathbb{N}.$$

En effet, nous avons démontré cette propriété en (2.13) pour m=0, p=1, tandis que nous la déduisons de ce qui précède dans les autres cas.

2.4. Démonstration de la propriété (2.5).

Soit $m \geq 1$. Supposons que

$$(2.22) \quad \lim_{t \to +\infty} (A-\Lambda) \frac{u_j(t)}{\|u_j(t)\|_{p-1}} = 0 \quad \text{dans } E_{p-1} ,$$

$$(2.23) \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{u_{j+1}(t) + \nu \Lambda u_j(t)}{\|u_j(t)\|_p} = 0 \quad \text{dans } E_p ,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour $p=1,\ldots,m$.

(a) De l'équation (2.12), nous déduisons que

$$(A-\Lambda)u_j = -\frac{1}{\nu}(u_{j+1} + \nu \Lambda u_j) + \frac{1}{\nu} g_j ,$$

et donc

$$\frac{\|(A-\Lambda)u_j\|_m}{\|u_j\|_m} \leq \frac{1}{\nu} \frac{\|u_{j+1} + \nu \Lambda u_j\|_m}{\|u_j\|_m} + \frac{1}{\nu} \frac{\|g_j\|_m}{\|u_j\|_m}$$

La propriété (2.21) et l'hypothèse (2.23) permettent alors de déduire la propriété (2.22) avec p=m+1.

(b) De l'équation (2.12), nous déduisons aussi que

$$A(u_{j+1} + \nu \Lambda u_j) = (A-\Lambda)u_{j+1} + \Lambda g_j ,$$

et donc

$$(2.24) \quad \frac{\|A(u_{j+1} + \nu \Lambda u_j)\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}} \leq \frac{\|(A-\Lambda)u_{j+1}\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}} + \frac{\Lambda \|g_j\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}}$$

Or, d'après la propriété (2.21), le terme de (2.24) contenant g_{j-1} admet une limite nulle pour $t\to+\infty$.
La propriété (2.3) et l'hypothèse (2.22) permettent alors de déduire de (2.24) que la propriété (2.23) est vérifiée pour $p = m+1$.

(c) Les propriétés (2.22)-(2.23) sont vérifiées pour m=1. Cela se déduit du Lemme 2.4 et des expressions

$$\frac{|(A-\Lambda)u_j|^2}{|u_j|2} = \frac{|Au_j|^2}{|u_j|^2} - 2\Lambda\frac{\|u_j\|^2}{|u_j|^2} + \Lambda^2,$$

$$\frac{\|u_{j+1} + \nu\Lambda u_j\|^2}{\|u_j\|^2} = \frac{\|u_{j+1}\|^2}{\|u_j\|^2} - 2\Lambda\frac{|u_{j+1}|^2}{\|u_j\|^2} + \nu^2\Lambda^2 + 2\Lambda\frac{(g_j,u_{j+}}{\|u_j\|^2}$$

où le terme contenant g_{j-1} admet une limite nulle pour $t\to+\infty$.

D'après les points (a), (b), (c), les propriétés (2.22)-(2.23) sont donc vraies pour tout $p\in\mathbb{N}^*$: cela montre en particulier la propriété (2.5).

2.5. Démonstration de la propriété (2.6).

Soit $m\geq 1$. Supposons que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{(I-R_\Lambda)u_j(t)}{\|u_j(t)\|_p} = 0 \quad \text{dans } E_p, \tag{2.25}$$

pour tout $j\in\mathbb{N}$, pour $p=0,\ldots,m$.

(a) Soit $j\in\mathbb{N}$. De l'équation (2.12), nous déduisons que

$$A(I-R_\Lambda)u_j = \frac{1}{\nu}(I-R_\Lambda)u_{j+1} + \frac{1}{\nu}(I-R_\Lambda)g_j,$$

et donc,

$$(2.26)\qquad \frac{\|A(I-R_\Lambda)u_j\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}} \leq \frac{1}{\nu}\frac{\|(I-R_\Lambda)u_{j+1}\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}} + \frac{1}{\nu}\frac{\|(I-R_\Lambda)g_j\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}}$$

D'après la propriété (2.21) et la continuité de l'application $(I-R_\Lambda)$, le terme de (2.26) contenant g_j admet une limite nulle pour $t\to+\infty$. Donc de l'hypothèse (2.25) et de l'inégalité (2.26), nous déduisons que la propriété (2.25) est vérifiée avec $p = m+1$.

(b) Or, d'après la relation (2.11) du Lemme 2.4, la propriété (2.25) est vraie pour m=1. En effet, il suffit d'écrire

$$\frac{\|R_\Lambda u_j\|}{\|u_j\|} = \Lambda^{1/2}\,\frac{|R_\Lambda u_j|}{|u_j|}\frac{|u_j|}{\|u_j\|},$$

ce qui montre que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\|R_\Lambda u_j(t)\|}{\|u_j(t)\|} = \lim_{t\to+\infty}\frac{|R_\Lambda u_j(t)|}{|u_j(t)|} = 1.$$

La propriété (2.5) est donc vraie pour tout $m\in\mathbb{N}$.

Le Théorème 2.1 est donc démontré.

□

3. Démonstration du Lemme 2.4.

Soit u la solution du Problème (2.1) et soient $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions dérivées de la fonction u par rapport au temps. Soit $\Lambda = \lim_{t\to+\infty}\rho_o(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2}$ la valeur propre de A obtenue précédemment (cf. § II.2.1). Les notations Λ_o, Λ_1, P_Λ, R_Λ sont celles introduites au § I.2.

Ecrivons u_j sous la forme $u_j = p_j + R_\Lambda u_j + q_j$, avec

$$(2.27) \qquad q_j = (I-P_\Lambda)u_j, \qquad p_j = \begin{cases} 0 \text{ si } \Lambda = \lambda_1, \\ P_{\Lambda_o} u_j \text{ si } \Lambda > \lambda_1. \end{cases}$$

Posons, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$(2.28) \begin{cases} \rho_j = \dfrac{\|u_j\|^2}{|u_j|^2}, \quad \chi_j = \dfrac{|q_j|^2}{|u_j|^2}, \quad \xi_j = \dfrac{|p_j|^2}{|u_j|^2}, \\ \\ v_j = (A-\rho_j)\dfrac{u_j}{|u_j|}, \end{cases}$$

et, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$(2.29) \quad \sigma_j = \frac{|u_j|^2}{\|u_{j-1}\|^2}, \qquad r_j = (u_j + \frac{\sigma_j}{\nu} u_{j-1}) \,/\, \|u_{j-1}\| .$$

Remarquons que les notations utilisées ici sont différentes de celles utilisées au § I.2, ρ_o désignant toutefois la même quantité.

3.1. La démonstration du Lemme 2.4 se fait par récurrence sur j.

Rappelons (cf. Remarque I.2.6.) que nous avons montré que

$$(2.30) \quad \Lambda = \lim_{t\to+\infty} \rho_o(t),$$

$$(2.31) \quad v_o \in L^2(t_o,+\infty;H),$$

$$(2.32) \quad \lim_{t\to+\infty} (\chi_o(t) + \xi_o(t)) = 0.$$

Donnons ci-dessous quel est, par exemple, le schéma de la première étape de la récurrence.

(a) D'une inéquation différentielle vérifiée par σ_1, nous déduisons que $\lim_{t\to+\infty} \sigma_1(t)$ existe et que la fonction r_1 appartient à $L^2(t_o,+\infty;V)$. De l'équation $u_1 + \nu Au + B(u) = 0$ et de la propriété (2.31), nous déduisons que $\lim_{t\to+\infty} \frac{\sigma_1(t)}{\nu^2} = \Lambda$; puis que $\lim_{t\to+\infty} \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2}$ existe et est égale à Λ.

(b) D'une inéquation différentielle vérifiée par ρ_1 (similaire à celle vérifiée par ρ_o), nous déduisons que $\lim_{t\to+\infty} \rho_1(t)$ existe et est une valeur propre de A, puis que la fonction v_1 appartient à $L^2(t_o,+\infty;H)$. De la propriété $r_1 \in L^2(t_o,+\infty;V)$ montrée en (a) et de l'équation $u_1 + \nu Au + B(u) = 0$, nous déduisons que $\lim_{t\to+\infty} \rho_1(t) = \Lambda$. Enfin, de la même façon qu'au § I.3.2., nous en déduisons que $\lim_{t\to+\infty} (\chi_1(t) + \xi_1(t)) = 0$.

3.2. Inégalités différentielles vérifiées par les fonctions ρ_j, χ_j, ξ_j et σ_j.

Montrons que, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d\rho_j}{dt} + \nu|v_j|^2 \leq \frac{1}{\nu}\frac{|g_j|^2}{|u_j|^2}, \tag{2.33}$$

$$\frac{d\chi_j}{dt} + \nu\frac{\|q_j\|^2 - \chi_j|u_j\|^2}{|u_j|^2} \geq \frac{1}{\nu(\Lambda_1-\Lambda)}\frac{|g_j|^2}{|u_j|^2}, \tag{2.34}$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} - \nu\frac{\xi_j\|u_j\|^2 - \|p_j\|^2}{|u_j|^2} \geq -\frac{1}{\nu(\Lambda-\Lambda_o)}\frac{|g_j|^2}{|u_j|^2}, \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\sigma_j}{dt} + \sigma\|r_j\|^2 = \left(\frac{g_j + \frac{\sigma_j}{\nu} g_{j-1}}{\|u_{j-1}\|}, \frac{u_j}{\|u_{j-1}\|}\right). \tag{2.36}$$

Les inégalités (2.33)(2.35) sont obtenues exactement comme dans le cas j=0, car la fonction u_j vérifie l'équation $\frac{du_j}{dt} + \nu Au_j = g_j$, similaire à l'équation (2.1) vérifiée par la fonction u.

Montrons l'égalité (2.36). De l'identité

$$\frac{1}{2}\frac{d\sigma_j}{dt} = \frac{1}{\|u_{j-1}\|^2}\left[\frac{du_j}{dt} - \sigma_j\, Au_{j-1}, u_j\right]$$

et de l'équation différentielle vérifiée par u_j, nous déduisons que

$$\frac{1}{2}\frac{d\sigma_j}{dt} = -\frac{\nu}{\|u_{j-1}\|^2}\left[\|u_j\|^2 + \frac{\sigma_j}{\nu}((u_{j-1},u_j))\right] + \frac{1}{\|u_{j-1}\|^2}(g_j,u_j) \tag{2.37}$$

Or, multipliant par u_j dans H la relation $u_j + \nu Au_{j-1} = g_{j-1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_j}{\nu}((u_{j-1},u_j)) &= -\frac{\sigma_j}{\nu^2}|u_j|^2 + \frac{\sigma_j}{\nu^2}(g_{j-1},u_j)\\ &= \|u_j + \frac{\sigma_j}{\nu}u_{j-1}\|^2 - \|u_j\|^2 - \frac{\sigma_j}{\nu}(g_{j-1},u_j)\end{aligned} \tag{2.38}$$

d'après la définition de σ_j.

Utilisant (2.38) dans (2.37), nous obtenons l'égalité (2.36).

Calculons aussi $|r_j|^2$, $j \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, écrivons

$$|u_j + \frac{\sigma_j}{\nu}u_{j-1}|^2 = |u_j|^2 + \frac{2\sigma_j}{\nu}(u_j,u_{j-1}) + \frac{\sigma_j^2}{\nu^2}|u_{j-1}|^2 . \tag{2.39}$$

Puis, multipliant par u_{j-1} dans H la relation $u_j + \nu Au_{j-1} = g_{j-1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_j}{\nu}(u_j,u_{j-1}) &= -\frac{\sigma_j}{\nu}\|u_{j-1}\|^2 + \frac{\sigma_j}{\nu}(g_{j-1},u_{j-1})\\ &= -|u_j|^2\left[1 - \frac{1}{\nu}\frac{(g_{j-1},u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}\right] .\end{aligned} \tag{2.40}$$

De (2.39)-(2.40), nous déduisons une expression de $|r_j|^2$:

$$(2.41)\qquad |r_j|^2 = \frac{1}{\nu^2}\frac{\sigma_j^2}{\rho_{j-1}} - \sigma_j\left[1 - \frac{2}{\nu}\frac{(g_{j-1},u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}\right]$$

Remarquons que $|r_1|^2 = \frac{1}{\nu^2}\frac{\sigma_1^2}{\rho_o}$. Nous verrons plus loin que, dans l'expression (2.41) ($j\geq 2$), le terme $\frac{(g_{j-1},u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}$ converge très vite vers 0 quand $t\to+\infty$.

3.3. Fin de la démonstration du Lemme 2.4. Nous opérons une récurrence sur j de la manière suivante.

Soit $j\geq 1$. Supposons que

$$(2.42)\qquad \lim_{t\to+\infty} \rho_p(t) = \Lambda\ ,\quad p = 0,..,j-1,$$

$$(2.43)\qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\rho_p(t)}{\nu^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|Au_{p-1}(t)|^2}{\|u_{p-1}(t)\|^2} = \Lambda\ ,\quad p = 1,...,j-1,$$

$$(2.44)\qquad \lim_{t\to+\infty} (\chi_p(t) + \xi_p(t)) = 0\ ,\quad p = 0,...,j-1,$$

(2.45) Il existe $t_{j-1}\geq t_o$ tel que $v_{j-1}\in L^2(t_{j-1},+\infty;H)$.

Les propriétés (2.42)-(2.43) impliquent en particulier que

$$(2.46)\qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\|u_{j-p}(t)\|}{\|u_{j-1}(t)\|} = (\nu\Lambda)^{p-1}\ ,\quad p = 1,...,j-1,$$

tandis que la propriété (2.45) implique l'existence d'une suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que

$$(2.47)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{|Au_{j-1}(\tau_n)|}{|u_{j-1}(\tau_n)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\|u_{j-1}(\tau_n)\|^2}{|u_{j-1}(\tau_n)|^2} = \Lambda.$$

(a) Etude de la fonction σ_j. (i) Montrons qu'il existe un réel $t_j \geq t_o$, et une fonction $\Phi_j \geq 0$, appartenant à $L^1(t_j,+\infty)$ tels que

$$\frac{d\sigma_j}{dt} + \nu|\!|r_j|\!|^2 \leq \sigma_j^{\,2}\,\Phi_j \quad \text{sur } (t_j,+\infty). \tag{2.48}$$

Pour cela, estimons le second membre de l'égalité (2.36). Ecrivons :

$$\frac{(g_j + \frac{\sigma_j}{\nu} g_{j-1}, u_j)}{|\!|u_{j-1}|\!|^2} =$$

$$= (B(r_j,u),r_j) - \frac{\sigma_j}{\nu}\left[B(r_j,u) + B(u,r_j), \frac{u_{j-1}}{|\!|u_{j-1}|\!|}\right]$$

$$+ \left[\sum_{p=1}^{j-1}\binom{j}{p} B\left[\frac{u_{j-p}}{|\!|u_{j-1}|\!|}, u_p\right] + \frac{\sigma_j}{\nu}\sum_{p=1}^{j-2}\binom{j-1}{p} B\left[\frac{u_{j-1-p}}{|\!|u_{j-1}|\!|}, u_p\right], \frac{u_j}{|\!|u_{j-1}|\!|}\right]$$

Dans les deux premiers termes, nous utilisons la continuité de l'application B de $V\times V$ dans l'espace $D(A^{-1/4})$, tandis que, dans le troisième terme, nous utilisons la continuité de l'application B de $V\times D(A^{3/4})$ dans l'espace H. Nous obtenons

$$\frac{(g_j + \frac{\sigma_j}{\nu} g_{j-1}, u_j)}{|\!|u_{j-1}|\!|^2}$$

$$\leq C_o|\!|u|\!|\,(|r_j|^{1/2}\,|\!|r_j|\!|^{3/2} + \frac{\sigma_j}{\nu}\lambda_1^{-1/4}\,|\!|r_j|\!|) \tag{2.49}$$

$$+ C_1\,\sigma_j^{1/2}\left[\sum_{p=1}^{j-1}\binom{j}{p}\frac{|\!|u_{j-p}|\!|}{|\!|u_{j-1}|\!|}\,|u_p|_{3/2} + \frac{\sigma_j}{\nu}\left[\sum_{p=1}^{j-2}\binom{j-1}{p}\frac{|\!|u_{j-1-p}|\!|}{|\!|u_{j-1}|\!|}\,|u_p|_{3/2}\right]\right.$$

Utilisant la formule de Young, nous déduisons de (2.36) et (2.49) que :

$$\frac{d\sigma_j}{dt} + \nu|\!|r_j|\!|^2 \leq C_2(|r_j|^2\,|\!|u|\!|^2 + \frac{\sigma_j^{\,2}}{\nu^2}\lambda_1^{-1/2})\,|\!|u|\!|^2 \tag{2.50}$$

$$+ \sigma_j^{1/2}\,(1 + \frac{\sigma_j}{\nu})\,\psi_j\,,$$

où nous avons posé

$$\psi_j = C_1 \left[\sum_{p=1}^{j-1} \binom{j}{p} \frac{\|u_{j-p}\|}{\|u_{j-1}\|} |u_p|_{3/2} + \sum_{p=1}^{j-2} \binom{j-1}{p} \frac{\|u_{j-1-p}\|}{\|u_{j-1}\|} |u_p|_{3/2} \right]$$

D'après le Lemme 2.3 et la propriété (2.46), la fonction ψ_j est intégrable sur l'intervalle $(t_o, +\infty)$.

Par ailleurs, comme $\lim_{t \to \infty} \frac{(g_{j-1}, u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2} = 0$, il existe un réel $t_j \geq t_o$ tel que

$$\text{(2.51)} \qquad \sup_{t \geq t_j} \frac{(g_{j-1}, u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2} \leq \frac{\nu}{2} \quad ;$$

donc, d'après (2.41), nous avons

$$\text{(2.52)} \qquad |r_j(t)| \leq \frac{1}{\nu} \frac{\sigma_j(t)}{\rho_{j-1}^{1/2}(t)} \leq \frac{1}{\nu \lambda_1^{1/2}} \sigma_j(t), \quad \forall\, t \geq t_j \ .$$

De plus, la fonction σ_j est minorée sur $[t_j, +\infty[$. En effet, d'après (2.40),

$$\nu - \frac{(g_{j-1}, u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2} = - \frac{(u_j, u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}$$

puis, d'après (2.51),

$$\text{(2.53)} \qquad \frac{\nu}{2} \leq \nu - \frac{(g_{j-1}(t), u_{j-1}(t))}{\|u_{j-1}(t)\|^2} \leq \frac{|u_j(t)|}{\|u_{j-1}(t)\|} \frac{|u_{j-1}(t)|}{\|u_{j-1}(t)\|} \leq \left(\frac{\sigma_j(t)}{\lambda_j} \right)^{1/2}$$

$$\forall\, t \geq t_j \ ,$$

Utilisant la majoration (2.52) de $|r_j|$ et la minoration (2.53) de σ_j, nous mettons l'inégalité (2.50) sous la forme (2.48).

(ii) Le passage à la limite pour $t \to +\infty$ se fait maintenant de façon standard. En effet, intégrant l'inégalité (2.47), nous obtenons que

$$\frac{1}{\sigma_j(s)} - \int_s^{+\infty} \Phi_j(\tau)d\tau \leq \frac{1}{\sigma_j(t)} , \quad \forall\, s,t, \quad t_j < s < t ;$$

donc $\lim_{t\to+\infty} \sigma_j(t)$ existe, est non nulle, mais peut éventuellement être égale à $+\infty$.

Or, de l'équation $u_j + \nu A u_{j-1} = g_{j-1}$ et de (2.53), nous déduisons que

$$(2.54) \qquad \frac{\|u_{j-1}\|}{|u_{j-1}|}\left(\nu - \frac{(g_{j-1},u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}\right) \leq \sigma_j^{1/2} \leq \nu \frac{|Au_{j-1}|}{\|u_{j-1}\|} + \frac{|g_{j-1}|}{\|u_{j-1}\|} .$$

Les termes contenant g_{j-1} admettent une limite nulle quand $t\to+\infty$. Utilisant la suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ définie par (2.47), nous déduisons des inégalités (2.54) que

$$(2.55) \qquad \lim_{t\to+\infty} \sigma_j(t) = \nu^2\Lambda .$$

Enfin, comme d'après l'équation vérifiée par u_j nous avons aussi

$$\nu \frac{\|u_{j-1}\|}{|u_{j-1}|} \leq \nu \frac{|Au_{j-1}|}{\|u_{j-1}\|} \leq \frac{|u_j|}{\|u_{j-1}\|} + \frac{|g_{j-1}|}{\|u_{j-1}\|} ,$$

nous déduisons de (2.42) et (2.55) que

$$(2.56) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{|Au_{j-1}(t)|^2}{\|u_{j-1}(t)\|^2} = \Lambda .$$

Nous avons donc montré la relation (2.43) pour p=j.

(b) Etude de la fonction ρ_j.

(i) Des résultats obtenus au §(a), nous déduisons qu'il existe une suite, encore notée $(\tau_n)_{n\geq 0}$, tendant vers $+\infty$, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_j(\tau_n) = \Lambda \tag{2.57}$$

En effet, la fonction σ_j étant bornée sur $(t_j,+\infty)$, la fonction $\|r_j\|^2$ est, d'après (2.48), intégrable sur $(t_j,+\infty)$: donc il existe une suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|r_j(\tau_n)\| = 0. \tag{2.58}$$

Or, nous avons (cf. (2.38))

$$\|r_j\|^2 = \frac{\|u_j\|^2}{\|u_{j-1}\|^2} - \frac{\sigma_j^2}{\nu^2} + \frac{2\sigma_j}{\nu^2}\frac{(g_{j-1},u_j)}{\|u_{j-1}\|^2} \tag{2.59}$$

Le terme contenant g_{j-1} tend vers 0 car

$$\frac{|(g_{j-1},u_j)|}{\|u_{j-1}\|^2} \leq \frac{|g_{j-1}|}{\|u_{j-1}\|}\sigma_j^{1/2} .$$

De (2.58)-(2.59), nous déduisons que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_j(\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\|u_j(\tau_n)\|^2}{\|u_{j-1}(\tau_n)\|^2}\frac{1}{\sigma_j(\tau_n)} = \Lambda .$$

(ii) Montrons qu'il existe une fonction, encore notée Φ_j, positive intégrable sur $(t_j,+\infty)$, telle que

$$\frac{|g_j|^2}{|u_j|^2} \leq \rho_j \Phi_j . \tag{2.60}$$

Utilisant la continuité de la forme B de l'espace V×D(A) à valeurs dans H, nous écrivons

$$\frac{|g_j|}{|u_j|} \leq C_o \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} \frac{\|u_{j-p}\|}{|u_j|} |Au_p| \quad ;$$

Ci-dessus, le terme $\frac{\|u_{j-p}\|}{|u_j|}$ est majoré sur $(t_j,+\infty)$ pour $p=1,\ldots,j$, tandis que pour $p=0$, ce terme est égal à $\rho_j^{1/2}$. Par ailleurs, les fonctions $|Au_p|$ sont intégrables sur $(t_j,+\infty)$, d'après le Lemme 2.3.

Donc, nous avons montré l'existence d'une fonction intégrable $\Phi_j \geq 0$, telle que

$$\frac{d\rho_j}{dt} + \nu|v_j|^2 \leq \rho_j \Phi_j \quad , \quad \text{sur } (t_j,+\infty). \tag{2.61}$$

Des inégalités analogues sont vérifiées par les fonctions ξ_j et χ_j.

Nous montrons de la même façon que dans le cas $j=0$ (cf. §I.3.2) que $\lim_{t\to+\infty} \rho_j(t)$ existe, que cette limite est égale à Λ d'après (2.57), puis que $\lim_{t\to+\infty} \chi_j(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} \xi_j(t)$ existent et sont nulles.

Enfin, nous déduisons aussi de (2.61) que la fonction v_j appartient à l'espace $L^2(t_j,+\infty;H)$. Nous avons donc montré les propriétés (2.42) et (2.44)-(2.45) pour $p=j$.

□

NOTES.

(^{1}) Ce cas, par contre, est très proche du cas - physique celui-là (intervenant par exemple en météorologie) - des équations de Navier-Stokes sur une sphère de $\mathbb{R}^3$.

(^{2}) $D(A^{m/2})$, $m \in \mathbb{Z}$, désigne le domaine de l'opérateur $A^{m/2}$. Par exemple, $D(A) = V \cap \mathbb{H}^2_{per}$ si $\mathcal{O} = Q$ ($\mathbb{H}^2_{per}$ est l'ensemble des restrictions à Q des fonctions périodiques, de période Q, et appartenant à $\mathbb{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$) ou $D(A) = V \cap \mathbb{H}^2(\mathcal{O})^N$ si $\mathcal{O} = \Omega$.

(^{3}) Les équations de Navier-Stokes possèdent au moins une solution faible $t \to u(t)$, définie sur $]0,+\infty[$; de plus toute solution faible, définie sur $]0,+\infty[$, devient régulière, c'est-à-dire continue à valeurs dans V, à partir de n'importe quel instant $t_o > 0$ si N=2, ou à partir d'un instant t_o assez grand si N=3. Nous supposons la solution considérée non nulle pour tout $t \geq t_o$. En fait, il suffit de supposer $u(t_o) \neq 0$ d'après la propriété d'unicité rétrograde (cf. par exemple C. Bardos - L. Tartar [14] et J. Serrin [16]).

(^{4}) La forme linéaire B est continue de $V_m \times V_{m+1}$ dans V_m pour $m \geq 2$, tandis que, pour m=1, B vérifie

$$\| B(u,v) \| \leq C_1 \| u \|^{1/2} |Au|^{1/2} |Av| \qquad \forall\, u,v \in D(A).$$

BIBLIOGRAPHIE.

|1| C. FOIAS, J.C. SAUT, Limite du rapport de l'enstrophie sur l'énergie pour une solution faible des équations de Navier-Stokes, C.R.A.S., 293, série I (1981), 241-244.

|2| C. FOIAS, J.C. SAUT, Asymptotic behavior, as $t \to +\infty$, of solutions of Navier-Stokes equations, Séminaire du Collège de France 1981-1982, Editions Pitman (1983).

|3| C. GUILLOPE, Comportement à l'infini des solutions des équations de Navier-Stokes et propriété des ensembles fonctionnels invariants (ou attracteurs), à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

|4| J.G. HEYWOOD, The Navier-Stokes equations : on the existence, regularity and decay of solutions, Indiana U. Math. J., 29 (1980), 639-681.

|5| J.G. HEYWOOD, R.RANNACHER, Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part I : Regularity of solutions and second-order estimates for spatial discretization, SIAM J. Numer. Anal., 19 (1982), 275-311.

|6| A.A. KISELEV, O.A. LADYZENSKAIA, On existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid, Ann. Math. Soc. Transl. (2), 24 (1963), 79-106.

|7| O.A. LADYZENSKAIA, Solutions "in the large" of nonstationary boundary value problem for the Navier-Stokes system with two space variables, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 427-433.

|8| J. LERAY, Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63 (1934), 193-248.

|9| J. LERAY, Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, J. Math. Pures et Appl., 13 (1934), 331-418.

|10| J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod-Gauthier Villars, Paris, (1969).

|11| R. TEMAM, Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis, North-Holland, Amsterdam, (1979).

|12| R. TEMAM, Behaviour at time t=0 of the solutions of semi-linear evolution equations, J. Diff. Eq., 43 (1982), 73-82.

|13| R. TEMAM, Navier-Stokes equations and nonlinear analysis, NSF/CBMS Regional Conference, Dekalb (1981), SIAM (1983).

|14| C. BARDOS, L. TARTAR, Sur l'unicité rétrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines, Arch. Rat. Mech. An. 50 (1973), 10-25.

|15| C. FOIAS, J.C. SAUT, Asymptotic behavior, as $t \to +\infty$, of solutions of Navier-Stokes Equations and Nonlinear Spectral Manifolds, Indiana Math. J., à paraître.

|16| J. SERRIN, The initial value problem for the Navier-Stokes equation in Non linear Problems. University of Wisconsin Press, R.E. LANGER ed., (1963).

FLOT DES EQUATIONS DE NAVIER - STOKES SUR LEURS SOUS-ENSEMBLES SPECTRAUX

C. Foias - C. Guillopé

Introduction

Dans cet article, nous étudions le comportement, à l'instant t et pour t tendant vers $+\infty$, des solutions régulières (ou fortes) des équations de Navier-Stokes, périodiques dans $\mathbb{R}^N$, N=2,3, et associées à une force nulle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{N} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \text{grad } p = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [T,+\infty), \tag{0.1}$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times [T,+\infty), \tag{0.2}$$

$$u(.,0) = u_o \quad \text{dans } \mathbb{R}^N , \tag{0.3}$$

$$u(.,t) \text{ et } p(.,t) \text{ sont Q-périodiques, } \forall\, t \in [T,+\infty[. \tag{0.4}$$

Le cube $Q =]0,L[^N$, $L > 0$, la viscosité $\nu > 0$, la vitesse initiale u_o sont données ; les inconnues du problème, c'est-à-dire la vitesse u et la pression p, sont supposées définies et régulières sur $\mathbb{R}^N \times [T,+\infty)$: l'instant T peut être choisi positif quelconque si N=2, tandis qu'en général, l'instant T doit être choisi assez grand si N=3 (cf. J. Leray [5]).

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des données initiales u_o donnant naissance à une solution (u,p) de (0.1)-(0.4) régulière sur l'intervalle $[0,+\infty)$. Notons $(\Lambda_k)_{k \geq 1}$ la suite croissante des valeurs propres distinctes de l'opérateur de Stokes.

Il a été montré récemment (cf. [1] - [2]) qu'à toute donnée, initiale u_o de $\mathcal{R}$, peut être associée une valeur propre $\Lambda = \Lambda(u_o)$ de l'opérateur de Stokes qui caractérise le comportement, lorsque $t \to +\infty$, de la solution issue de u_o. En outre, la relation $\Lambda = \Lambda(u_o)$ peut être précisée : des sous-ensembles M_k, $k \in \mathbf{N}$, de $\mathcal{R}$ ont été construits dans [1], [2] de telle façon que le comportement, lorsque $t \to +\infty$, de la solution de (0.1) - (0.4) issue d'une donnée initiale u_o de $M_{k-1} \setminus M_k$ est caractérisé par la valeur propre Λ_k.

Dans cet article, nous mettons en évidence des relations entre le comportement, à divers instants t et pour t tendant vers $+\infty$, des solutions régulières du système (0.1) - (0.4). En particulier, nous obtenons des estimations de la valeur propre $\Lambda = \Lambda(u_o)$ en fonction des réels $\| u(t) \|$, $t \in \mathbf{R}$ (norme du gradient de u(t) dans $L^2(Q)^N$). Nous montrons aussi que les solutions issues de données initiales $u_o \in \mathcal{R}$ assez grandes décroissent en un intervalle de temps très court vers leur état d'équilibre.

Dans le paragraphe 1, après avoir décrit le cadre fonctionnel où seront étudiées les équations de Navier-Stokes périodiques en espace, nous introduisons une notion d'arc sous-intégral relatif au système (0.1) - (0.4), ou plutôt relatif à l'équation différentielle abstraite déduite de (0.1) - (0.4). Dans le paragraphe 2, nous présentons quelques propriétés géométriques des arcs sous-intégraux ; précisément, nous décrivons quelles sont les positions relatives d'un "arc solution" de (0.1) - (0.4) et des arcs sous-intégraux. C'est dans le paragraphe 3, que sont obtenues des relations entre le comportement, à divers instants t et pour t tendant vers $+\infty$, des solutions régulières de (0.1) - (0.4).

Plan

1. Préliminaires
2. Propriétés des arcs sous intégraux
3. Comportement à t fini, et pour $t \to +\infty$, des solutions régulières de (0.1) - (0.4).

1. Préliminaires

Nous utilisons ici la présentation des équations de Navier-Stokes périodiques en espace décrite par R. Temam en [8].

1.1. Notations. Présentation de quelques résultats classiques

Soit Q le cube de $\mathbb{R}^N$, N = 2,3, de côtés de longueur L : sa frontière Γ est constituée de "faces" opposées Γ_i et Γ_{N+i}, i=1,...,N. La normale à Γ, dirigée vers l'extérieur, est notée n.

Nous notons $H^s(Q)$, $s \in \mathbb{R}$: l'espace de Sobolev d'ordre s construit sur $L^2(Q)$, $\mathbb{L}^2(Q) = L^2(Q)^N$ et $\mathbf{H}^s(Q) = H^s(Q)^N$.

$$H = \{u \mid u \in \mathbb{L}^2(Q),\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } Q,\ \int_Q u\,dx = 0,$$

$$u.n_{|\Gamma_i} = -u.n_{|\Gamma_{N+i}},\ i=1,\dots,N\},$$

$$V = \{u \mid u \in \mathbf{H}^1(Q),\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } Q,\ \int_Q u\,dx = 0,$$

$$u_{|\Gamma_i} = u_{|\Gamma_{N+i}},\ i=1,\dots,N\}$$

L'espace H est muni de la norme de $\mathbb{L}^2(Q)$, soit $|.|$ et l'espace V est muni de la norme du gradient dans $\mathbb{L}^2(Q)$, soit $\|.\|$. Les produits scalaires associés sont notés $(.,.)$ et $((.,.))$.

Soit A, l'opérateur de Stokes, défini comme un isomorphisme de V dans V' (dual de V) par $< Au,v >_{V',V} = ((u,v))$, $\forall\, v \in V$, et prolongé à H comme opérateur non borné, de domaine

$$D(A) = V \cap \{u \mid u \in \mathbf{H}^2(Q),\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_i} = -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{N+i}},\ i=1,\dots,N\}$$

En fait l'opérateur A, restreint à D(A), est égal à $-\Delta$. L'opérateur A^{-1}, autoadjoint, compact de H, admet une suite de vecteurs propres formant une base orthonormale de H, soit

$$Aw_m = \lambda_m w_m, \quad w_m \in D(A), \quad \text{où} \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

Les espaces $V_m = D(A^{m/2})$, $m \in \mathbb{R}$, munis de la norme $|A^{m/2}|$, sont hilbertiens. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, V_m s'injecte de façon continue dans $H^m(Q)$; de plus, la restriction à V_m de la norme de $H^m(Q)$ est équivalente à la norme de V_m choisie ci-dessus.

Soit b la forme trilinéaire continue, définie par

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j}^{N} \int_Q u_i D_i v_j w_j dx, \quad \forall\ (u,v,w) \in V \times V \times V.$$

Nous notons B la forme bilinéaire, définie pour $(u,v) \in V \times V$, par

$$< B(u,v), w >_{V',V} = b(u,v,w) \quad \forall\ w \in V\ ,$$

et $B(u) = B(u,u) \quad \forall\ u \in V.$

La forme b a les propriétés remarquables :

$$b(u,v,v) = 0, \quad \forall\ (u,v) \in V \times V,$$

et, en dimension d'espace N=2,

$$b(u,u,Au) = 0, \ \forall\ u \in D(A).$$

Utilisant ces notations, nous mettons le problème (0.1)-(0.4) sous la forme d'une équation différentielle dans V' :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \nu\, Au + B(u) = 0 \\ \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

Si la donnée initiale u_o appartient à H, alors le Problème (1.1) admet au moins une solution faible, c'est-à-dire une solution u vérifiant

$$(1.2)\qquad \begin{cases} u \in \mathcal{C}_b([0,+\infty) ; H_{faible})^{(2)} \cap L^2(0,+\infty,V), \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu \|u(t)\|^2 \leq 0 \quad \text{p.p. } t \geq 0 \end{cases}$$

(cf. par exemple S. Leray [5], J.L. Lions [6], R. Temam [7]).

Par ailleurs, cette solution u est une solution forte et est unique sur $]0,+\infty[$ si N=2, et sur $[T,+\infty[$, T assez grand, si N=3, c'est-à-dire u est continu de $[T,+\infty)$ dans V ; en fait

$$u \in \mathcal{C}^\infty([T,\infty) ; \bigcap_{m \in \mathbb{N}} D(A^{m/2})) ,$$

et, lorsque $t \to +\infty$, la solution u tend vers 0 dans l'espace $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} D(A^{m/2})$; de plus, l'inégalité (1.2) est en fait une égalité, pour $t \geq T$.

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des données initiales u_o de V telles que la solution de (1.1), issue de u_o, soit une solution forte sur $[0,+\infty)$: $\mathcal{R}$ est un ouvert contenant 0, et $\mathcal{R} = V$ si N=2, tandis qu'en dimension N=3, c'est un problème ouvert de savoir si $\mathcal{R}$ est égal à V ou non (cf. J. Leray [5]). Notons $(S(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe non linéaire défini sur $\mathcal{R}$: pour tout $u_o \in \mathcal{R}$, $S(.)u_o$ est l'unique solution du système (1.1).

Notons $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs propres distinctes de l'opérateur A : $\lambda_1 = \Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots$; soit m_k la multiplicité de la vlaeur propre Λ_k.

Dans [1] [2], il a été montré que le comportement, pour $t \to +\infty$, de la solution $t \to S(t)u_o$, $u_o \in \mathcal{R}$, est caractérisé par une valeur propre $\Lambda(u_o)$ de l'opérateur A. En particulier $u = S(.)\, u_o$ vérifie

$$(1.4)\qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2} = \Lambda(u_o) ;$$

de plus, la solution u converge dans $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} D(A^{m/2})$ vers 0, lorsque $t \to +\infty$, exactement comme la fonction $\exp(-\nu\Lambda(u_o)t)$ (cf. [2] [4]).

En outre, la relation entre u_o et $\Lambda = \Lambda(u_o)$ peut être précisée. Des sous-ensembles analytiques M_k, $k \in \mathbb{N}$ de $\mathfrak{R}$ ont été construits dans [1] [2]. Ces ensembles, qui sont appelés ensembles spectraux, ont les propriétés suivantes :

(1.5) $\quad M_o = \mathfrak{R} \supset M_1 \supset \ldots M_k \supset M_{k+1} \supset \ldots$;

(1.6) dans un voisinage de l'origine, M_k est une variété analytique lisse de codimension $m_1+\ldots+m_k$;

(1.7) M_k est invariant par le semi-groupe $S(t)$ (i.e. $S(t)\, M_k \subset M_k \quad \forall\, t \geq 0$) ;

(1.8) pour $k \in \mathbb{N}^*$: $u_o \in M_{k-1} \backslash M_k \iff \Lambda(u_o) = \Lambda_k$.

De plus, tout ensemble spectral M_k contient une variété linéaire, non bornée dans V et de dimension infinie ; les ensembles $M_{k-1} \backslash M_k$ sont aussi non bornés dans V (cf. [2]).

1.2. Quelques estimations a priori

Notons $C = C(N)$ la constante adimensionnelle telle que

$$(1.9) \qquad \left| \int_Q \varphi \Psi \rho \, dx \right| \leq C \begin{cases} |\varphi|^{1/2} \|\varphi\|^{1/4} \|\Psi\|^{1/2} |\Psi|^{1/2} |\rho| & \text{si } N=2 \\ |\varphi|^{1/2} \|\varphi\|^{1/2} \|\Psi\| \, |\rho| & \text{si } N=3 \end{cases}$$

$\forall\, (\varphi,\Psi,\rho) \in H^1(Q) \times H^2(Q) \times L^2(Q)$. Cette inégalité est déduite de l'inégalité de Hölder et d'inégalités d'interpolation (cf. par exemple [3] [6] [8]).

Lemme 1.1. Toute solution régulière sur $[T,+\infty)$ de l'équation (1.1) vérifie : pour $t \geq T$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\,|Au(t)|^2 = 0 \quad \text{si } N=2, \tag{1.10}$$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\,|Au(t)|^2\right| \leq C\,\|u(t)\|^{3/2}|Au(t)|^{3/2} \quad \text{si } N=3, \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au(t)|^2 + \nu\,|A^{3/2}u(t)|^2 \leq 2C\,\|u(t)\|^{2-N/2}|Au(t)|^{N/2}\,|A^{3/2}u(t)|. \tag{1.12}$$

Démonstration :

(i) Les estimations (1.10) et (1.11) sont classiques : elles sont obtenues en multipliant l'équation (1.1) dans H par $Au(t)$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\,|Au(t)|^2 = -b(u(t),u(t),Au(t)),$$

où comme u est une solution du problème périodique en espace ([1]) :

$$b(u,u,Au) = \begin{cases} 0 & \text{si } N=2, \\ \sum_{k=1}^{N} b(D_k u,u,D_k u) & \text{si } N=3 \ . \end{cases}$$

(ii) Multipliant l'équation (1.1) par $A^2u(t)$ dans H, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au(t)|^2 + \nu\,|A^{3/2}u(t)|^2 = -b(u(t),u(t),A^2u(t))$$

avec

$$b(u,u,A^2u) = \sum_{k=1}^{N} b(D_k u,u,D_k Au) + \sum_{k=1}^{N} b(u,D_k u,D_k Au)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} b(D_k u,u,D_k Au) + \sum_{i,k=1}^{N} b(D_i u,D_k u,D_i D_k u)$$

L'inégalité (1.12) est alors une conséquence immédiate de l'inégalité de continuité (1.9).

□

De l'inégalité (1.12) et de la propriété $|A^{3/2}v| \geq |Av|^2 / \|v\|$, $\forall\, v \in D(A^{3/2})$, nous déduisons la propriété suivante.

Proposition 1.2. Soit u une solution régulière sur $[T,+\infty[$ de l'équation (1.1).

Si l'instant $t \geq T$ est tel que

$$|Au(t)|^{2-N/2} \geq \frac{2C}{\nu} \|u(t)\|^{3-N/2} \tag{1.13}$$

alors u(t) vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au(t)|^2 \leq -\nu \frac{|Au(t)|^4}{\|u(t)\|^2} + 2C \frac{|Au(t)|^{2+N/2}}{\|u(t)\|^{1+N/2}} \leq 0 . \tag{1.14}$$

De plus, si l'inégalité (1.13) est stricte (>), alors le deuxième membre de (1.14) est strictement négatif (< 0).

Démonstration :

Notons $\chi = |A^{3/2}u(t)|$. La fonction f, définie par

$$f(\chi) = -\nu\,\chi^2 + 2C\,\|u(t)\|^{2-N/2}\,|Au(t)|^{N/2}\,\chi,$$

est décroissante et négative pour $\chi \geq \chi_1$ où

$$\chi_1 = \frac{2C}{\nu}\,\|u(t)\|^{2-N/2}|Au(t)|^{N/2}.$$

Mais d'après la définition de χ, nous avons $\chi \geq |Au(t)|^2 / \|u(t)\|$. Donc, supposant $|Au(t)|^2/\|u(t)\| \geq \chi_1$ (resp. $> \chi_1$) - c'est la condition (1.13) -, nous obtenons

$$f(\chi) \leq f(|Au(t)|^2 / \|u(t)\|) \leq f(\chi_1) \leq 0$$

(resp. $f(\chi) \leq f(|Au(t)|^2 / \|u(t)\|) < f(\chi_1) \leq 0$).

L'inégalité (1.14) résulte alors de l'inégalité (1.12). □

Remarque 1.3. La constante 2C intervenant dans les inégalités (1.13)-(1.14), n'est probablement pas optimale : nous la noterons par aC, où a est égal à 2 (il se peut que a soit inférieur à 2).

□

Remarque 1.4. Pour toute solution u de l'équation (1.1), la condition (1.13) est réalisée pour $t \geq T$, T assez grand. En effet, la condition (1.13) se met sous la forme

$$\frac{|Au(t)|^{2-N/2}}{\|u(t)\|^{2-N/2}} \geq \frac{aC}{\nu} \|u(t)\| ;$$

or, pour t tendant vers $+\infty$, il existe une valeur propre Λ de l'opérateur de Stokes telle que le premier membre de cette inégalité tend vers $\Lambda^{1-N/4}$ tandis que le second membre tend vers 0.

□

1.3. Définition d'un arc sous-intégral

Dans la suite, nous considérons un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$, d'axes $\vec{O\xi}$, $\vec{O\eta}$: le point (ξ,η) représentera un point $(\|u(t)\|^2, |Au(t)|^2)$, si u est une solution régulière à l'instant t de l'équation (1.1).

Notons (Γ) l'arc de courbe d'équation $\eta^{1-N/4} = \frac{aC}{\nu} \xi^{3/2-N/4}$, $\xi \geq 0$: c'est un arc convexe, précisément un arc de parabole si N=2, ou un arc de cubique si N=3. Notons $(\mathcal{E})$ la portion de plan $\{(\xi,\eta),\ \eta^{1-N/4} \geq \frac{aC}{\nu} \xi^{3/2-N/4},\ \xi \geq 0\}$.

D'après la Proposition 1.2, si u est une solution régulière à l'instant t de l'équation (1.1) et que le point $(\|u(t)\|^2, |Au(t)|^2)$ appartient à $(\mathcal{E})$, alors les fonctions $t \to \|u(t)\|^2$ et $t \to |Au(t)|^2$ sont décroissantes à l'instant t.

Définition 1.5. Un arc de courbe d'équation $\eta = \eta(\xi)$, $\xi \geq 0$, inclus dans la portion de plan $(\mathcal{E})$, sera dit sous-intégral pour l'équation (1.1) si et seulement si, pour toute solution régulière u de l'équation (1.1), l'application $t \to |Au(t)|^2 - \eta(\|u(t)\|^2)$ est décroissante sur tout intervalle où sa valeur est positive.

Nous dirons qu'un arc de courbe d'équation $\eta = \eta(\xi)$, $\xi \geq 0$, est croissant si et seulement si $\eta' \geq 0$.

Les inégalités (1.10)-(1.11) et le résultat de la Proposition 1.2 nous permettent d'exhiber une famille d'arcs sous-intégraux pour l'équation (1.1).

Proposition 1.6.

Soit $\gamma > 0$. L'arc de courbe $(\mathcal{C}_\gamma)$, dont une représentation paramétrique est, pour $\rho \in [0,1]$,

$$(1.15)\quad \begin{cases} \xi = \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \gamma \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2}, \quad \eta = \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \gamma^2 \frac{\rho^2}{(1+\rho)^4} & \text{si } N=2, \\ \xi = \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \gamma^{1/2} \frac{\rho^2}{\left(1+\frac{3+a}{2a}\rho\right)^{2\cdot\frac{a+1}{a+3}}}, & \\ \eta = \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \gamma^{3/2} \frac{\rho^2}{\left(1+\frac{3+a}{2a}\rho\right)^{6\cdot\frac{a+1}{a+3}}} & \text{si } N=3 \end{cases}$$

est un arc sous-intégral relatif à l'équation (1.1).

L'arc $(\mathcal{C}_\gamma)$ admet aussi l'équation implicite

$$(1.16)\quad \begin{cases} \frac{\eta}{\xi}\left(1+\frac{aC}{\nu}\xi\,\eta^{-1/2}\right)^2 = \gamma & \text{si } N=2, \\ \frac{\eta}{\xi}\left(1+\frac{3+a}{2}\frac{C}{\nu}\xi^{3/4}\,\eta^{-1/4}\right)^{4\cdot\frac{a+1}{a+3}} = \gamma & \text{si } N=3, \end{cases}$$

où $(\xi,\eta) \in (\mathcal{E})$.

Démonstration :

(i) Considérons, pour l'instant, le cas de la dimension N=3. Soit $\eta = \eta(\xi)$, $\xi \geq 0$, l'équation d'un arc de courbe croissant inclus dans la portion de plan $(\mathcal{E})$. Soit u une solution régulière de l'équation (1.1) et considérons un instant t où le point $(\|u(t)\|^2, |Au(t)|^2)$ appartient à (ξ) : d'après la Remarque 1.4, il suffit de choisir t assez grand .

Des inégalités (1.10) et (1.11) , nous déduisons que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|Au(t)|^2 - \eta(\|u(t)\|^2)\right]$$

$$(1.17) \qquad \leq -\frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2}\left[\nu\,|Au(t)|^2 - aC\,\|u(t)\|^{3/2}|Au(t)|^{3/2}\right]$$

$$+\frac{d\eta}{d\xi}(\|u(t)\|^2)\left[\nu|Au(t)|^2 + C\,\|u(t)\|^{3/2}\,|Au(t)|^{3/2}\right].$$

Les arcs de courbes d'équation $\eta = \eta(\xi)$ inclus dans $(\mathcal{E})$ et vérifiant l'équation différentielle

$$(1.18) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi}\,\frac{1 - \frac{aC}{\nu}\,\xi^{3/4}\,\eta^{-1/4}}{1 + \frac{C}{\nu}\,\xi^{3/4}\,\eta^{-1/4}}$$

sont des arcs sous-intégraux relatifs à l'équation (1.1).

En effet, posant $\rho = \frac{aC}{\nu}\,\xi^{3/4}\,\eta^{-1/4}$ si $\eta > 0$ et $\rho=0$ si $\eta=0$, nous voyons que le point (ξ,η) appartient à $(\mathcal{E})$ si et seulement si ρ appartient à $[0,1]$. Définissons la fonction $g : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ par

$$g(\xi,\eta) = \frac{\eta}{\xi}\,\frac{1 - \frac{aC}{\nu}\,\xi^{3/4}\,\eta^{-1/4}}{1 + \frac{C}{\nu}\,\xi^{3/4}\,\eta^{-1/4}} = \left(\frac{aC}{\nu}\right)^4 \frac{\xi^3}{\rho^4}\,\frac{1-\rho}{1+\rho/a}\,.$$

Pour $\xi \geq 0$ fixé, la fonction $\eta \to g(\xi,\eta)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, car

$$\frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{4a\xi}\,\frac{1+a-(1-\rho)^2}{(1+\rho/a)^2}$$

est positif pour $\rho \in]0,1]$. Les arcs de courbes de $(\mathcal{E})$, d'équation $\eta = \eta(\xi)$ vérifiant la relation (1.18), sont donc croissants ; de plus, la relation (1.17) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|Au(t)|^2 - \eta\left(\|u(t)\|^2\right)\right)$$

$$\leq \left(g\left(\|u(t)\|^2, \eta\left(\|u(t)\|^2\right) - g\left(\|u(t)\|^2, |Au(t)|^2\right)\right)\right.$$

$$\left. \cdot \left(\nu|Au(t)|^2 + C\ \|u(t)\|^{3/2}\ |Au(t)|^{3/2}\right)\right.$$

et, comme la fonction $g(\xi,.)$ est croissante, les arcs de courbes intégrales de l'équation différentielle (1.18), qui sont inclus dans $(\mathcal{E})$ sont des arcs sous-intégraux relatifs à l'équation (1.1).

La détermination effective de ces courbes se fait facilement, grâce à la variable ρ définie précédemment. Le paramètre γ est égal à la pente de la tangente à l'origine à la courbe $(\mathcal{C}_\gamma)$ les courbes sont concaves et présentent un maximum en leur point d'intersection avec l'arc (Γ). Enfin, par un point de $(\mathcal{E})$, passe une courbe sous-intégrale $(\mathcal{C}_\gamma)$ et une seule (cf. Figure 1.1).

(ii) Dans le cas de la dimension N=2, nous posons

$$\rho = \frac{aC}{\nu}\,\xi\,\eta^{-1/2}, \text{ si } \eta > 0 \quad \text{et} \quad \rho = 0 \quad \text{si } \eta = 0.$$

Les arcs $(\mathcal{C}_\gamma)$, $\gamma>0$, sont des arcs des courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi}\left(1 - \frac{aC}{\nu}\ \xi\eta^{-1/2}\right). \tag{1.19}$$

La preuve est la même que dans le cas de la dimension N=3. □

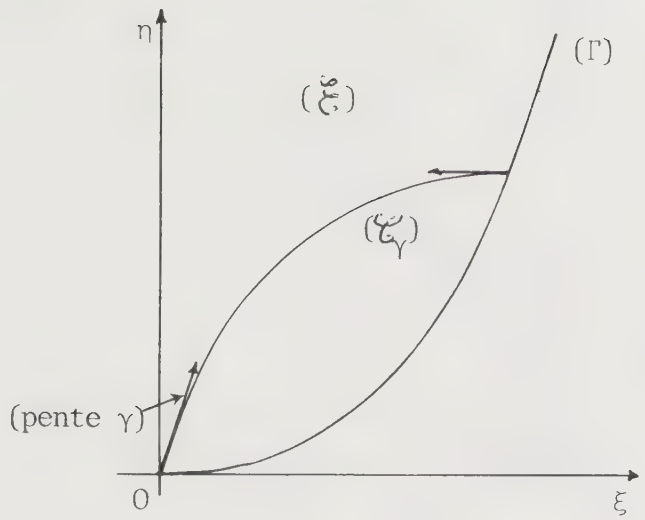


Figure 1.1. - L'arc (Γ), la portion de plan $(\mathcal{E})$ et un arc sous-intégral $(\mathcal{C}_\gamma)$ relatif à l'équation (1.1)

2. Propriétés des arcs sous-intégraux

Soit u une solution régulière de l'équation (1.1) définie pour tout $t \geq T$: notons $(\mathcal{C})$ l'arc de courbe $t \to m(t) = (\|u(t)\|^2, |Au(t)|^2)$, $t \geq T$.

2.1. Positions de l'arc $(\mathcal{C})$ au voisinage d'un point $m(t_o)$ de $(\mathcal{E})$.

Proposition 2.1. Soit $m(t_o) = (\|u(t_o)\|^2, |Au(t_o)|^2)$ un point de $(\mathcal{E}) \cap (\mathcal{C})$. L'arc sous-intégral $(\mathcal{C}_{\gamma(t_o)})$, passant par le point $m(t_o)$, traverse l'arc $(\mathcal{C})$ en $m(t_o)$ et est situé au-dessus (resp. au-dessous) de l'arc $(\mathcal{C})$ pour tout $t \geq t_o$ (resp. pour tout $t \leq t_o$) tel que l'arc $\overset{\frown}{m(t_o)\ m(t)}$ de $(\mathcal{C})$ soit inclus dans $(\mathcal{E})$. (cf. Figure 2.1).

Démonstration : Soit $\eta = \eta_{\gamma(t_o)}(\xi)$ l'équation de l'arc sous-intégral passant par $m(t_o)$.

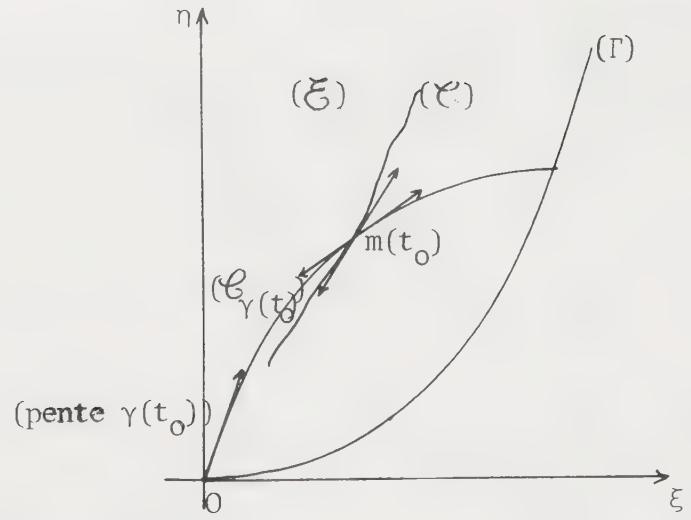


Figure 2.1. - Positions de l'arc $(\mathcal{C})$ et de l'arc $\mathcal{C}_{\gamma(t_o)}$ au voisinage du point $m(t_o)$ de $(\mathcal{C}) \cap (\Xi)$

Au point $m(t_o)$, la pente de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ est supérieure ou égale à celle de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_{\gamma(t_o)})$. En effet, d'après les inégalités (1.10) ou (1.11), et (1.14), nous avons

$$\left(\frac{\frac{d}{dt} |Au(t)|^2}{\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2} \right)\Bigg|_{t=t_o} \geq g(\|u(t_o)\|^2, |Au(t_o)|^2) = \frac{d\eta_{\gamma(t_o)}}{d\xi} (\|u(t_o)\|^2),$$

car $\eta_{\gamma(t_o)} (\|u(t_o)\|^2) = |Au(t_o)|^2$.

Nous montrons la Proposition 2.1 en raisonnant par l'absurde. Pour cela, nous noterons $\mathcal{V}(t_o)$ un voisinage de t_o tel que l'arc $\{m(t) \in (\mathcal{C}), t \in \mathcal{V}(t_o)\}$ soit inclus dans (Ξ), et $\mathcal{V}_+(t_o) = \mathcal{V}(t_o) \cap \{t \geq t_o\}$, $\mathcal{V}_-(t_o) = \mathcal{V}(t_o) \cap \{t \leq t_o\}$

(i) Supposons qu'il existe $\tau \in \mathcal{V}_+(t_o)$ tel que

$$|Au(\tau)|^2 > \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(\tau)\|^2) . \tag{2.1}$$

Le réel

$$\tau_1 = \text{Inf}\{t \in \mathcal{V}_+(t_o),\ t_o \le t < \tau,\ |Au|^2 > \eta_{\gamma(t_o)}(\|u\|^2) \text{ sur }]t,\tau]\}$$

est tel que :

$$t_o \le \tau_1 < \tau,\ |Au(\tau_1)|^2 = \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(\tau_1)\|^2),$$

$$|Au|^2 > \eta_{\gamma(t_o)}(\|u\|^2) \quad \text{sur} \quad]\tau_1,\tau].$$

Mais, d'après la Définition 1.5 d'un arc sous-intégral, la fonction $t \to |Au(t)|^2 - \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(t)\|^2)$, qui est positive pour $t \in]\tau_1,\tau]$, est décroissante pour $t \in]\tau_1,\tau]$ et, en particulier,

$$|Au(\tau)|^2 - \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(\tau)\|^2) \le |Au(\tau_1)|^2 - \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(\tau_1)\|^2) = 0,$$

ce qui contredit l'inégalité (2.1).

Nous avons donc montré que l'arc $(\mathcal{C})$ est situé au-dessous de l'arc $(\mathcal{C}_{\gamma(t_o)})$ pour tout $t \ge t_o$ tel que l'arc $\overset{\frown}{m(t_o)\ m(t)}$ de $(\mathcal{C})$ soit inclus dans $(\mathcal{E})$.

(ii) Supposons maintenant qu'il existe $\tau \in \mathcal{V}_-(t_o)$ tel que

$$|Au(\tau)|^2 < \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(\tau)\|^2) . \tag{2.2}$$

De la même façon que précédemment, le réel

$$\tau_2 = \text{Sup}\{t \in \mathcal{V}_-(t_o),\ \tau < t \le t_o,\ |Au|^2 < \eta_{\gamma(t_o)}(\|u\|^2) \quad \text{sur} \quad [\tau,t[\}$$

a les propriétés suivantes :

$$\tau < \tau_2 \leq t_o, \quad |Au(\tau_2)|^2 = \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(\tau_2)\|^2) ,$$

$$|Au|^2 < \eta_{\gamma(t_o)}(\|u\|^2) \quad \text{sur} \quad [\tau,\tau_2[.$$

Considérant l'arc sous-intégral passant par le point $m(\tau)$, soit $(\mathcal{C}_{\gamma(\tau)})$, nous avons, d'après l'inégalité (2.2),

$$\eta_{\gamma(\tau)}(\|u(\tau)\|^2) < \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(\tau)\|^2) ,$$

et donc $\gamma(\tau) < \gamma(t_o)$.

Nous avons donc montré que le réel $\tau_2 \in \mathcal{V}_-(t_o)$ vérifie $\tau_2 > \tau$ et l'inégalité (2.1), avec (t_o,τ) remplacé par (τ,τ_2) , car

$$|Au(\tau_2)|^2 = \eta_{\gamma(t_o)}(\|u(\tau_2)\|^2) > \eta_{\gamma(\tau)}(\|u(\tau_2)\|^2) .$$

Mais, nous avons montré au § (i) que cette situation est impossible.

□

2.2. Position de l'arc $(\mathcal{C})$ au voisinage du point 0 $(t \to +\infty)$

Utilisant le fait que $\lim_{t\to+\infty} \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2}$ existe et est égale à une valeur propre $\Lambda = \Lambda(u)$ de l'opérateur A, nous déduisons immédiatement de la Proposition 2.1, le résultat suivant :

Proposition 2.2. L'arc $(\mathcal{C})$ est tangent en 0 à l'arc sous-intégral $(\mathcal{C}_\Lambda)$ et est situé au-dessus de cet arc dans un voisinage de 0. De plus, si l'arc $(\mathcal{C})$ considéré est inclus dans la portion de plan (Ξ), alors il est situé au-dessus de l'arc $(\mathcal{C}_\Lambda)$.

Remarquons que, par ailleurs, l'arc $(\mathcal{C})$ se trouve situé au-dessous de la droite d'équation $\eta = \lambda_1 \xi$, $\xi \geq 0$ (cf. Figure 2.2).

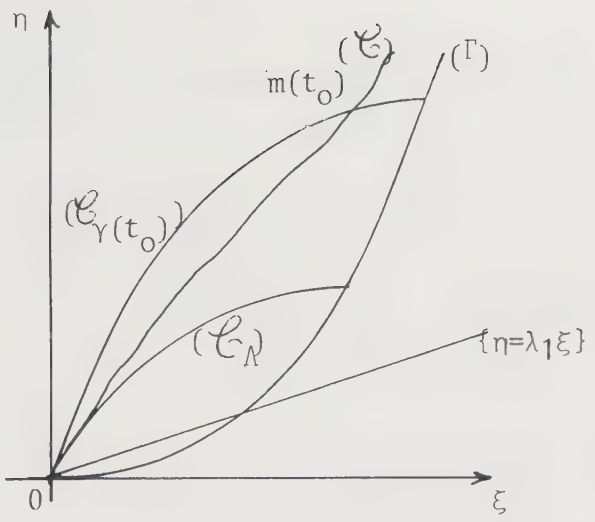


Figure 2.2. - Position de l'arc $(\mathcal{C})$ par rapport à divers arcs sous-intégraux.

Dans la suite, nous nous intéresserons plus précisément au cas où $\Lambda >> \lambda_1$. En particulier, nous considérerons les cas où $(\mathcal{C}_\Lambda)$ est situé au-dessus de la droite d'équation $\eta=\lambda_1\xi$, c'est-à-dire

$$\Lambda \geq \begin{cases} 4\lambda_1 & \text{si } N=2, \\ \left(\frac{3a+3}{2a}\right)^{4.\frac{a+1}{a+3}} \lambda_1 & \text{si } N=3 ; \end{cases}$$

ces valeurs sont déduites de l'équation implicite (1.17) (où $\gamma=\Lambda$) de l'arc $(\mathcal{C}_\Lambda)$.

□

3. Comportement, à t fini et pour $t \to +\infty$, des solutions régulières de (0.1)-(0.4).

Soit $\Lambda = \Lambda_k > \lambda_1$ une valeur propre de A. Soit u_o un élément de l'ensemble spectral $M_{k-1}\backslash M_k$ et soit $u = S(.)\, u_o$: dans ce cas, nous posons $T = 0$.

Si $V \setminus \mathfrak{R}$ est non vide (dimension N=3) et si u_o est un élément de $V \setminus \mathfrak{R}$, nous noterons aussi u une solution du problème (1.1), définie régulière et non nulle pour $t \geq T$, T assez grand : la valeur propre Λ, associée à u, sera alors définie par

$$\Lambda = \Lambda(u) = \lim_{t \to +\infty} \frac{|A^{(p+1)/2} u|^2}{|A^{p/2} u|^2} \quad , \quad \forall \ p \in \mathbb{N} \ .$$

Nous notons $\mathcal{C}$ l'arc $\{m(t) = (\|u(t)\|^2, Au(t))^2, \ t \geq T\}$ et (ξ_o, η_o) le point d'intersection de l'arc (Γ) et de la droite d'équation $\eta = \lambda_1 \xi$, soit

$$(\xi_o, \eta_o) = \left(\left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \lambda_1^{2-N/2} \ , \ \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \lambda_1^{3-N/2}\right) : \tag{3.1}$$

nous supposerons que la solution choisie vérifie en particulier

$$\|u(T)\|^2 > \xi_o \ . \tag{3.2}$$

Dans ce paragraphe, nous donnons une estimation de Λ en fonction de u_o, et, en dimension N=3, en fonction de la solution u choisie. Nous montrons aussi que, si $\Lambda >> \lambda_1$, alors il existe une solution u^Λ de (0.1)-(0.4) et un intervalle de temps très court sur lequel u^Λ décroît dans V très rapidement.

Ces résultats en dimension d'espace N=2 s'expriment de façon particulièrement simple grâce à l'égalité (1.10).

3.1. Etude en dimension d'espace N=2.

Soit $\Lambda = \Lambda_k \geq \lambda_1$ une valeur propre de A et soit $u_o \in D(A) \cap (M_{k-1} \setminus M_k)$. Alors la fonction $t \to \|u(t)\|^2 / |u(t)|^2$ décroît vers Λ ; en effet, u, solution régulière de l'équation (1.1) pour tout $t \geq 0$, vérifie d'après l'égalité d'énergie (1.2) et l'égalité (1.10) :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2}\right) + \nu\left|\left(A - \frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2}\right)\frac{u(t)}{|u(t)|}\right|^2 = 0, \quad \forall\, t \geq 0 ;$$

donc

$$\Lambda \leq \frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2} \leq \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2}, \quad \forall\, t \geq 0 .$$

L'arc $(\mathcal{C})$ est donc situé au-dessus de la demi-droite d'origine O et de pente Λ .

Nous supposons, dans la suite de ce paragraphe, que $\Lambda > \lambda_1$. Introduisons le point d'intersection de l'arc (Γ) et de la droite d'équation $\eta=\Lambda\xi$, soit

$$(\xi_2,\eta_2) = \left(\left(\frac{\nu}{ac}\right)^2 \Lambda\ ,\quad \left(\frac{\nu}{ac}\right)^2 \Lambda^2\right).$$

Si, à l'instant τ, $\|u(\tau)\|^2 > \xi_2$, alors l'arc $\{m(t) \in (\mathcal{C}),\ t \geq \tau\}$ peut quitter la région $(\mathcal{E})$ à un instant σ tel que $\|u(\sigma)\|^2 > \xi_2$; cependant, cet arc reste situé au-dessus de la droite d'équation $\eta=\Lambda\xi$; de plus, la fonction $t \to \|u(t)\|^2$ est décroissante pour tout $t \geq 0$ (cf. Figure 3.3 a et b).

Nous savons (cf. §.1.1) que les ensembles $M_{k-1}\backslash M_k$ sont non bornés : au lieu de l'hypothèse (3.2), nous supposons maintenant que

$$\|u(T)\|^2 > \xi_2 . \tag{3.3}$$

Soit τ_2 le dernier instant où $\|u(\tau_2)\|^2 = \xi_2$ et soit τ un instant antérieur tel que l'arc $\{m(t),\ t \in (\tau_1,\tau_2)\}$ soit inclus dans la région $(\mathcal{E})$. Soit enfin τ_o l'instant tel que $\|u(\tau_o)\|^2 = \xi_o$ (cf. Figure 3.1).

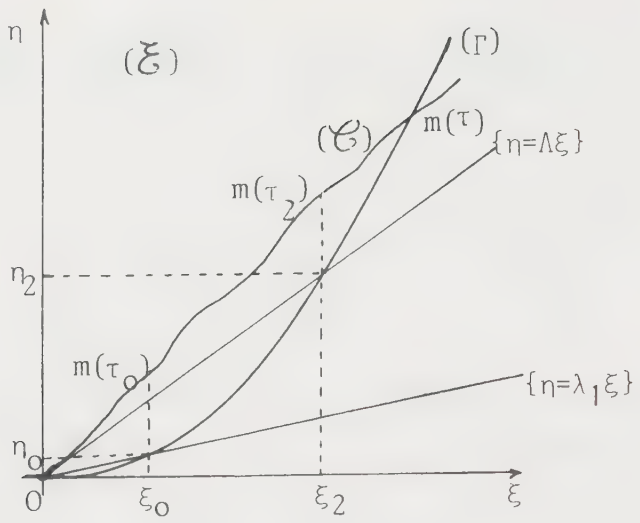


Figure 3.1. - Les arcs (Γ), (Ξ) et les droites d'équations $\eta=\lambda_1\xi$ et $\eta=\Lambda\xi$ (dimension N=2) .

Estimons les intervalles de temps $\tau_2-\tau$ et $\tau_o-\tau_2$. Comme $|Au|^2 \geq (\frac{aC}{\nu})^2 \ \|u\|^4$ sur l'intervalle (τ,τ_2), nous déduisons de l'égalité (1.10) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu \ (\frac{aC}{\nu})^2 \ \|u\|^4 \leq 0 \qquad \text{sur } (\tau,\tau_2) \ ,$$

puis en intégrant sur (τ,τ_2), que

$$\nu \ (\frac{aC}{\nu})^2 \ (\tau_2-\tau) \leq \frac{1}{2\ \|u(\tau_2)\|^2} \ .$$

D'après la valeur de $\|u(\tau_2)\|$, nous obtenons

$$(3.4) \qquad 0 < \tau_2-\tau \leq \frac{1}{2\nu\Lambda} \ .$$

Par ailleurs, comme $|Au|^2 \geq \Lambda \ \|u\|^2$ sur l'intervalle (τ_2,τ_o) nous déduisons aussi de l'égalité (1.10) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \ \|u\|^2 + \nu\Lambda \ \|u\|^2 \leq 0 \quad \text{sur } (\tau_2,\tau_o),$$

puis,en intégrant sur (τ_2,τ_o), que

$$\tau_o-\tau_2 \leq \frac{1}{\nu\Lambda} \text{Log} \frac{\|u(\tau_2)\|}{\|u(\tau_o)\|},$$

soit, enfin,

$$\tau_o-\tau_2 \leq \frac{1}{2\nu\Lambda} \text{Log} \frac{\Lambda}{\lambda_1} \cdot \tag{3.5}$$

Nous avons donc montré les résultats suivants :

Théorème 3.1. Soit $\Lambda=\Lambda_k \geq \lambda_1$ une valeur propre de l'opérateur A. Si $u_o \in D(A) \cap (M_{k-1} \backslash M_k)$, alors Λ et u_o sont liés par la relation

$$\lambda_1 \leq \Lambda \leq \frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2} \leq \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2}, \quad \forall\, t \geq 0 \cdot$$

Proposition 3.2.

Soit $\Lambda=\Lambda_k > \lambda_1$ et soit $u_o \in D(A) \cap (M_{k-1} \backslash M_k)$ vérifiant en outre $\|u_o\| \geq \frac{\nu}{aC} \Lambda^{1/2}$. Alors la fonction $u = S(.)u_o$ a la propriété suivante : il existe deux instants τ_2 et τ_o tels que

$$\|u(\tau_2)\| = \frac{\nu}{aC} \Lambda^{1/2}, \qquad \|u(\tau_o)\| = \frac{\nu}{aC} \lambda_1^{1/2},$$

et

$$0 < \tau_o-\tau_2 < \frac{1}{2\nu\Lambda} \text{Log} \frac{\Lambda}{\lambda_1} \cdot$$

La propriété énoncée ci-dessus est en réalité une conséquence immédiate des inégalités (1.2) et (1.10), en particulier du fait que les fonctions $\|u(.)\|$ et $\|u(.)\| / |u(.)|$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+$.

Nous allons voir qu'en dimension N=3, bien que nous ne sachions rien d'aussi précis sur le comportement des fonctions $\|u(.)\|$ et $\|u(.)\| / |u(.)|$, la fonction u vérifie une propriété similaire à celle énoncée dans la Proposition 3.2 pour la dimension 2.

3.2. Etude en dimension d'espace N=3 .

Les fonctions $t \to \|u(t)\|^2$ et $t \to |Au(t)|^2$ sont décroissantes sur l'ensemble des instants t tels que le point m(t) appartienne à $(\mathcal{E})$. Donc si à l'instant τ, $\|u(\tau)\|^2 < \xi_0$, alors $\|u(t)\|^2 < \xi_0$, $\forall\, t \geq \tau$; de plus, l'arc $\{m(t) \in (\mathcal{C}),\ t \geq \tau\}$ est situé au-dessus de l'arc sous-intégral $(\mathcal{C}_\Lambda)$.

Par contre, si, à l'instant τ, $\|u(t)\|^2 \geq \xi_0$, il se peut que l'arc $\{m(t) \in (\mathcal{C}),\ t \geq \tau\}$ quitte la région $(\mathcal{E})$ en un instant σ tel que $\|u(\sigma)\|^2 \geq \xi_0$, dans ce cas, l'arc $(\mathcal{C})$ peut couper l'arc $(\mathcal{C}_\Lambda)$ (cf. Figure 3.3.c et d).

3.2.1. Une estimation du réel Λ.

Théorème 3.3. Soit u une solution régulière de l'équation (0.1), définie pour tout $t \geq T$ (T assez grand).

Notons : $\Lambda = \lim_{t \to +\infty} (|Au(t)|^2 / \|u(t)\|^2)$. Il existe une constante C_0, indépendante des données et de la solution u, telle que

$$(3.6)\quad \Lambda \leq C_0 \begin{cases} \dfrac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2} & \text{si } |Au(t)|^{1/2} > \dfrac{aC}{\nu} \|u(t)\|^{3/2},\ \forall\, t \geq T, \\ \sup\limits_{t \geq T} \left(\dfrac{aC}{\nu} \|u(t)\|\right)^4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration : Notons $(\mathcal{C})$ l'arc $\{m(t) = (\|u(t)\|^2, |Au(t)|^2),\ t \geq T\}$

(i) Supposons que, pour tout $t \geq T$, le point m(t) appartienne à $(\mathcal{E})$, c'est-à-dire

$$|Au(t)|^{1/2} \geq \frac{aC}{\nu} \|u(t)\|^{3/2},\ \forall\, t \geq T .$$

Ainsi que nous l'avons remarqué au début de ce paragraphe 3.2, l'arc $(\mathcal{C})$ se trouve entièrement situé au-dessus de l'arc $(\mathcal{C}_\Lambda)$. En particulier, l'arc sous-intégral passant par m(t) est situé au-dessus de l'arc $(\mathcal{C}_\Lambda)$, ce qui implique, d'après l'équation (1.16),

$$\Lambda \leq \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2}\left(1 + \frac{3+a}{2a}\frac{aC}{\nu}\frac{\|u(t)\|^{3/2}}{|Au(t)|^{1/2}}\right)^{4.\frac{a+1}{a+3}} , \quad \forall\, t \geq T,$$

soit

$$\Lambda \leq C_o \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2} , \quad \forall\, t \geq T ,$$

avec

$$C_o = \left(\frac{3+3a}{2a}\right)^{4.\frac{a+1}{a+3}} .$$

(ii) Supposons maintenant qu'il existe un instant $t \geq T$ tel que

$$|Au(t)|^{1/2} \leq \frac{aC}{\nu} \|u(t)\|^{3/2} .$$

Notons t_1 un instant tel que

$$\|u(t_1)\| = \sup_{t \geq T} \|u(t)\| .$$

La droite d'équation $\xi = \|u(t_1)\|^2$ coupe l'arc (Γ) au point $(\|u(t_1)\|^2, (\frac{aC}{\nu})^4 \|u(t_1)\|^6)$; l'arc $(\mathcal{C})$ est situé au voisinage de O dans la région du plan comprise entre l'arc sous-intégral passant par ce point et l'arc $(\mathcal{C}_\Lambda)$; cela implique, en particulier, une relation d'ordre entre les pentes à l'origine de ces deux arcs, soit :

$$\Lambda \leq C_o \left(\sup_{t \geq t_o} \frac{aC}{\nu} \|u(t)\|\right)^4$$

où la constante C_o a été définie précédemment. □

Remarque 3.4. Dans le cas du problème de Stokes (linéaire), nous obtenons l'inégalité

$$\Lambda \leq \frac{|Au_o|^2}{\|u_o\|^2} \qquad \text{(dimension N=2 ou 3)},$$

car u_o appartient au sous-espace propre (ou spectral) associé aux valeurs propres supérieures ou égales à Λ. La valeur de la constante C_o trouvée dans le Théorème 3.2, soit $C_o = (9/4)^{12/5}$, ne semble pas optimale. □

3.2.2. Propriété de décroissance très rapide de la solution

Nous supposons maintenant que Λ est très supérieur à λ_1. Nous mettons en évidence le même phénomène que dans le cas de la dimension N=2 (cf. Théorème 3.1. (ii)) : précisément, nous montrons l'existence d'une solution u^Λ et d'un intervalle de temps très court (équivalent à $c\text{Log}\Lambda/\Lambda^{2/3}$) sur lequel u^Λ décroît très rapidement dans V (taux de décroissance dans V équivalent à $c\Lambda^{-1/4}$) (cf. Figure 3.4.b).

Dans l'énoncé présenté ci-dessous, nous notons u^Λ par u.

Proposition 3.5. Soit $\Lambda=\Lambda_k$ une valeur propre de l'opérateur A. Soit u_o un élément de l'ensemble $M_{k-1}\backslash M_k$ vérifiant $\|u_o\| > \frac{\nu}{aC}\left(\frac{\Lambda}{C_o}\right)^{1/4}$. Soit $u = S(.)\,u_o$.

Si Λ est suffisamment supérieur à λ_1, alors il existe deux instants τ_o et τ_1 vérifiant

$$\|u(\tau_1)\| = \frac{\nu}{aC}\left(\frac{\Lambda}{C_o}\right)^{1/4} \qquad \|u(\tau_o)\| = \frac{\nu}{aC}\,\lambda_1^{1/4},$$

et

$$0 < \tau_1 - \tau_o \leq \frac{a}{2(a-1)}\,\frac{1}{\nu\lambda_1^{1/2}\Lambda^{2/3}}\,\text{Log}\left(\frac{\Lambda}{C_o\lambda_1}\right).$$

Démonstration : Soit $\Lambda=\Lambda_k$ une valeur propre de A : l'ordre de grandeur de $\Lambda-\lambda_1$ sera précisé à la fin de cette démonstration. L'ensemble $M_k \backslash M_{k-1}$ étant non borné dans V (cf [2]), nous pouvons choisir $u_o \in M_k \backslash M_{k-1}$ tel que

$$\|u_o\| > \frac{\nu}{aC} \left(\frac{\Lambda}{C_o}\right)^{1/4} .$$

Soient $u = S(.)u_o$ et $(\mathcal{C})$ l'arc $\{m(t) = (\|u(t)\|^2, |Au(t)|^2), t > 0\}$. Notons (ξ_1,η_1) le point d'intersection des arcs $(\mathcal{C}_\Lambda)$ et (Γ), soit

$$(\xi_1,\eta_1) = \left(\left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \left(\frac{\Lambda}{C_o}\right)^{1/2}, \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \left(\frac{\Lambda}{C_o}\right)^{3/2}\right)$$

(i) Soient τ_1 et τ_o les derniers instants où $\|u(\tau_1)\|^2 = \xi_1$ et $\|u(\tau_o)\|^2 = \xi_o$ (ξ_o a été défini au début du §.3). Soit τ un instant antérieur à τ_1 tel que l'arc $\{m(t) \in (\mathcal{C}), t \in (\tau,\tau_1)\}$ soit inclus dans $(\mathcal{E})$: nous pouvons, par exemple, choisir le point $m(\tau)$ sur l'arc (Γ).

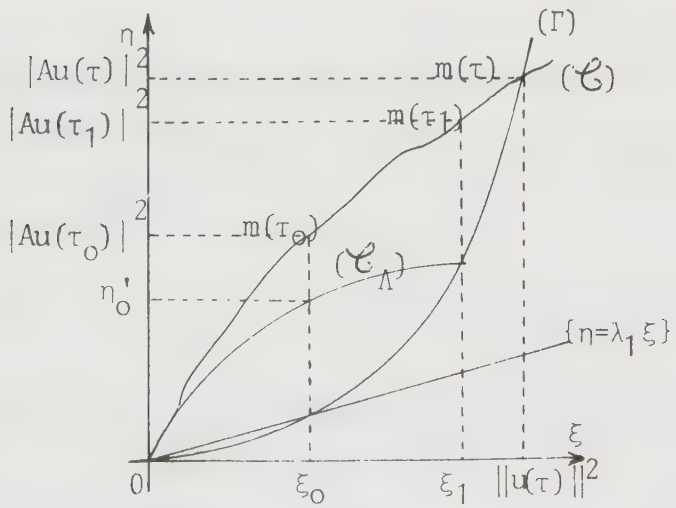


Figure 3.2. - Les arcs $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}_\Lambda)$ et (Γ).

D'après les Propositions 2.1 et 2.2, l'arc sous-intégral passant par le point $m(\tau)$ est situé au-dessus de l'arc $(\mathcal{C}_\Lambda)$. Donc, d'après la relation (3.6),

$$\Lambda \leq C_o \left(\frac{aC}{\nu} \|u(\tau)\|\right)^4,$$

soit

$$\|u(\tau)\| \geq \|u(\tau_1)\| = \frac{\nu}{aC} \left(\frac{\Lambda}{C_o}\right)^{1/4}.$$

Par ailleurs $\|u(\tau_o)\| = \frac{\nu}{aC} \lambda_1^{1/4}$.

Cela montre les relations (3.7).

(ii) Estimons l'intervalle de temps $\tau_1-\tau$. De l'inégalité (1.11) et de l'inégalité de Young, nous déduisons que, pour tout $t \geq T$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\left(1-\frac{3\alpha}{4}\right)|Au(t)|^2 \leq \left(\frac{C}{\nu}\right)^4 \frac{\nu}{4\alpha^3}\|u(t)\|^6,$$

$\forall\, \alpha \in]0,\frac{4}{3}]$.

Intégrant cette inégalité sur (τ,τ_1), nous obtenons

$$\nu\left(1-\frac{3\alpha}{4}\right)\left(\int_\tau^{\tau_1} \frac{|Au(s)|^2}{\|u(s)\|^4}\,ds\right) \leq \left(\frac{C}{\nu}\right)^4 \frac{\nu}{4\alpha^3}\left(\int_\tau^{\tau_1} \|u(s)\|^2\,ds\right) + \frac{1}{2\|u(\tau_1)\|^2}. \tag{3.9}$$

Par ailleurs, nous avons

$$|Au|^2 \geq \left(\frac{aC}{\nu}\right)^4 \|u\|^6 \quad \text{sur } [\tau,\tau_1],$$

et donc

$$\int_\tau^{\tau_1} \frac{|Au(s)|^2}{\|u(s)\|^4}\,ds \geq \left(\frac{aC}{\nu}\right)^4 \left(\int_\tau^{\tau_1} \|u(s)\|^2\,ds\right). \tag{3.10}$$

Les inégalités (3.9) et (3.10) impliquent en particulier que

$$\nu\left(\frac{C}{\nu}\right)^4 \left[\left(1-\frac{3\alpha}{4}\right)a^4 - \frac{1}{4\alpha^3}\right] \left(\int_\tau^{\tau_1} \|u(s)\|^2 \, ds\right) \le \frac{1}{2\|u(\tau_1)\|^2} \; ;$$

la constante numérique du membre de gauche est maximale pour $\alpha = \frac{1}{a}$: nous obtenons alors

$$(3.11) \qquad \nu\left(\frac{aC}{\nu}\right)^4 \frac{a-1}{a} \left(\int_\tau^{\tau_1} \|u(s)\|^2 \, ds\right) \le \frac{1}{2\|u(\tau_1)\|^2} \; .$$

Cette inégalité n'est significative que pour $a > 1$, ce qui est le cas ici, car nous avons montré à la Proposition 1.2 que la constante a=2 convient (cf. aussi Remarque 1.3).

D'après la valeur de $\|u(\tau_1)\|^2$, nous déduisons de (3.11) que

$$(3.12) \qquad \nu\left(\int_\tau^{\tau_1} \|u(s)\|^2 \, ds\right) \le \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \frac{a}{2(a-1)} \left(\frac{C_o}{\Lambda}\right)^{1/2} .$$

Mais, comme $\|u(s)\| \ge \|u(\tau_1)\|$, $\forall\, s \in (\tau, \tau_1)$, nous déduisons de (3.12) que

$$(3.13) \qquad 0 < \tau_1 - \tau \le \frac{a}{2(a-1)\nu} \frac{C_o}{\Lambda} .$$

(iii) Estimons maintenant l'intervalle de temps $\tau_o - \tau_1$.
Pour cela, nous remarquons que

$$|Au(s)|^2 \ge \eta_o' \; , \; \forall\, s \in (\tau_1, \tau_o) \; ,$$

où η_o' est l'ordonnée du point de $(\mathcal{C}_\Lambda)$ d'abscisse ξ_o (cf. Figure 3.2).

L'inégalité (1.11) peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu|Au(t)|^{3/2}\left(|Au(t)|^{1/2} - \frac{C}{\nu}\|u(t)\|^{3/2}\right) \le 0 \; ;$$

l'arc $\{m(t) \in (\mathcal{C}),\ t \in (\tau_1, \tau_o)\}$ étant inclus dans $(\mathcal{E})$, nous déduisons de l'inégalité précédente que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2(a-1)\,C\,\left(\frac{aC}{\nu}\right)^{1/3}(\eta_o')^{2/3}\|u(t)\|^2 \le 0, \tag{3.15}$$

$$\forall\, t \in (\tau_1,\tau_o).$$

Intégrant l'inégalité (3.15) sur (τ_1,τ_o), nous obtenons

$$0 < \tau_o-\tau_1 \le \frac{1}{2(a-1)C}\left(\frac{\nu}{aC}\right)^{1/3}(\eta_o')^{-2/3}\,\mathrm{Log}\,\frac{\|u(\tau_1)\|^2}{\|u(\tau_o)\|^2},$$

soit

$$0 < \tau_o-\tau_1 \le \frac{1}{4(a-1)C}\left(\frac{\nu}{aC}\right)^{1/3}(\eta_o')^{-2/3}\,\mathrm{Log}\left(\frac{\Lambda}{C_o\lambda_1}\right). \tag{3.16}$$

Il nous reste à évaluer le réel η_o' ; pour cela, vu que η_o' est donné par la représentation paramétrique (1.16) de l'arc $(\mathcal{C}_\Lambda)$, soit

$$\eta_o' = \left(\frac{aC}{\nu}\right)^4 \frac{\xi_o^3}{\rho_o^4} = \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \frac{\lambda_1^{3/2}}{\rho_o^4},$$

où ρ_o est la solution de l'équation

$$\frac{\rho_o^2}{\left(1+\frac{3+a}{2a}\rho_o\right)^{2\cdot\frac{a+1}{a+3}}} = \left(\frac{\lambda_1}{\Lambda}\right)^{1/2},$$

nous donnerons ici seulement un équivalent de η_o' pour Λ tendant vers $+\infty$. Nous avons

$$\rho_o \underset{\Lambda\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\lambda_1}{\Lambda}\right)^{1/4}$$

et donc,

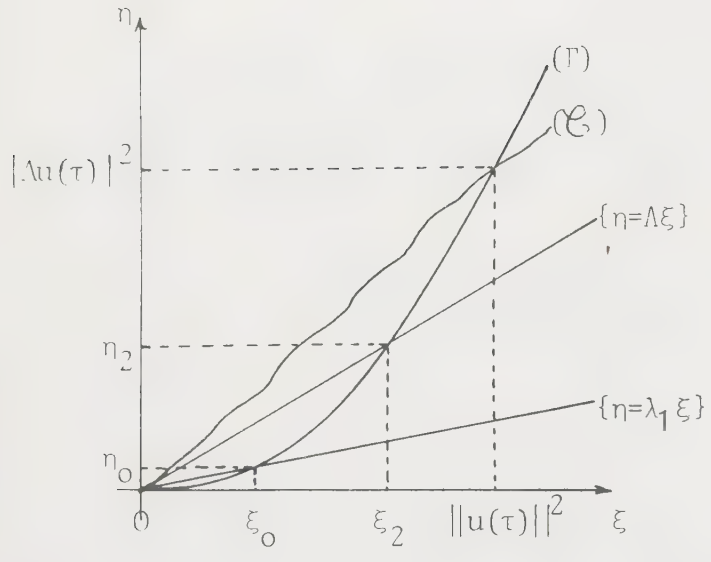
$$\eta_o' \underset{\Lambda\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\nu}{aC}\right)^2 \lambda_1^{1/2}\,\Lambda\,. \tag{3.17}$$

De l'inégalité (3.16) et de l'estimation (3.17), nous déduisons l'existence d'un réel $\bar{\Lambda}$ tel que, pour toute valeur propre Λ de A supérieure à $\bar{\Lambda}$, nous avons

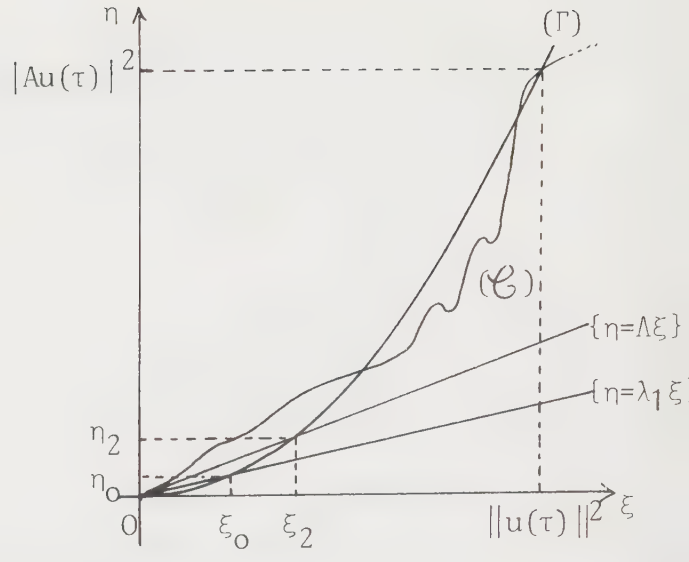
$$(3.18) \qquad 0 < \tau_o - \tau_1 \leq \frac{a}{2(a-1)} \frac{1}{\nu \lambda_1^{1/3} \Lambda^{2/3}} \operatorname{Log} \left(\frac{\Lambda}{C_o \lambda_1}\right) .$$

Le Théorème 3.4 est donc démontré. □

Remarque 3.5. Le résultat du Théorème 3.4 a été énoncé pour des solutions régulières sur $(0,+\infty)$. Cet énoncé s'adapte facilement au cas des solutions régulières sur $(T,+\infty)$ telles que $\|u(T)\|^2 \geq \xi_1$. □

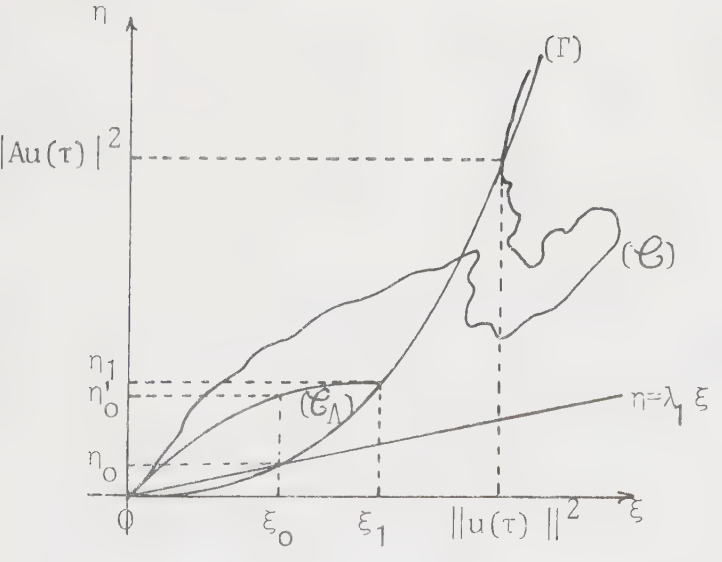


a.

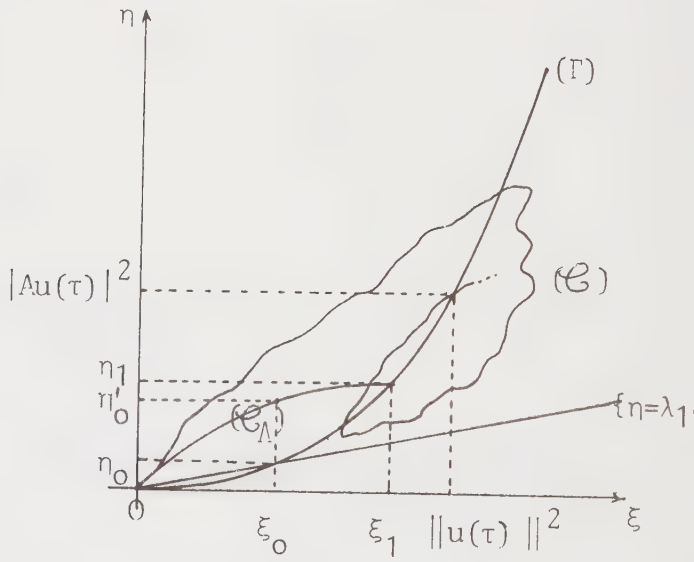


b.

N = 2



c.

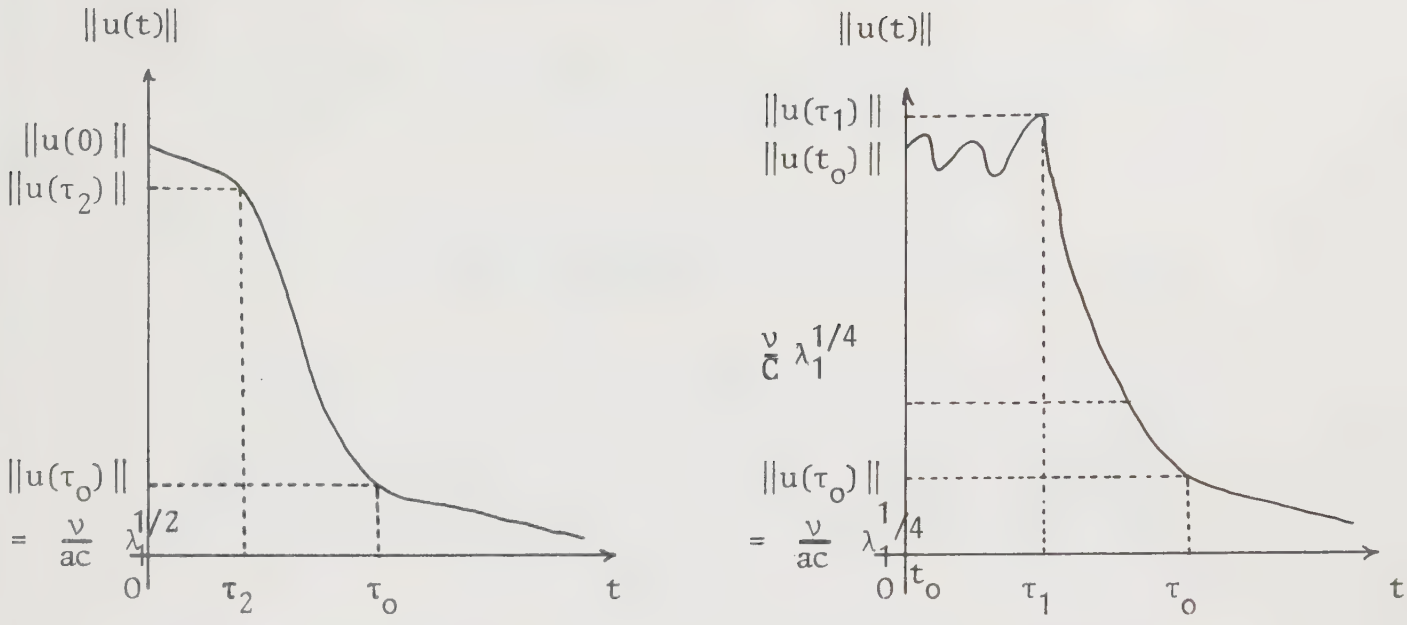


d.

N = 3

Figure 3.3. - Diverses allures possibles de l'arc $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C}) = \{m(t) = (\|u(t)\|^2, |Au(t)|^2),\ t \geq \tau\}$.



N=2 $(u(0) \in D(A))$

a.

N=3 $(u(t_o) \in V)$

b.

Figure 3.4. - Idée du graphe de la fonction $t \to \|u(t)\|$

si $\Lambda = \lim_{t \to +\infty} \frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2} \gg \lambda_1$.

ANNEXE : Calcul des arcs sous-intégraux

A.1. - Cas de la dimension N=2

Les arcs sous-intégraux, d'équation $\eta=\eta(\xi)$, $\xi \geq 0$, sont les arcs intégraux de l'équation différentielle (1.19) :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} \left(1 - \frac{aC}{\nu} \xi\eta^{-1/2}\right) ;$$

en posant $\rho = \frac{aC}{\nu} \xi\eta^{-1/2}$, nous cherchons les arcs intégraux de l'équation différentielle, relative aux variables η et ρ, déduites de (1.19), soit

$$\frac{1}{2} \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1-\rho}{1+\rho} \frac{d\rho}{\rho} .$$

Par intégration, nous obtenons

$$\eta^{1/2} \frac{(1+\rho)^2}{\rho} = \text{constante} = \alpha , \tag{A1}$$

et ξ est alors donné par $\xi = \frac{\nu}{ac} \rho\eta^{1/2}$.

L'arc intégral $(\mathscr{C}_\gamma)$ est choisi de telle façon que la pente de la tangente à l'origine soit égale à γ. Mais, de l'équation (A1), nous déduisons que, pour ρ voisin de 0,

$$\eta \sim \alpha^2\rho^2 \quad , \quad \xi \sim \frac{\nu}{ac} \alpha\rho^2 .$$

Donc, le paramètre α, intervenant dans l'équation (A1), est donné par

$$\gamma = \lim_{\rho\to 0} \frac{\eta(\rho)}{\xi(\rho)} = \alpha \frac{aC}{\nu} .$$

Reportant la valeur de α dans (A1), nous en déduisons les équations (1.15) et (1.16) de l'arc $(\mathscr{C}_\gamma)$, dans le cas de la dimension N=2.

A.2. - Cas de la dimension N=3

Les arcs sous-intégraux, d'équation $\eta=\eta(\xi)$, $\xi \geq 0$, sont les arcs intégraux de l'équation différentielle (1.18),

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} \; \frac{1 - \frac{aC}{\nu} \xi^{3/4} \eta^{-1/4}}{1 + \frac{C}{\nu} \xi^{3/4} \eta^{-1/4}} \; ;$$

en posant $\rho = \frac{aC}{\nu} \xi^{3/4} \eta^{-1/4}$, nous cherchons les arcs intégraux de l'équation différentielle, relative aux variables η et ρ, et déduites de (1.18), soit

$$\frac{3}{4a} \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1-\rho}{2a+(3+a)\rho} \frac{d\rho}{\rho} \; .$$

Par intégration, nous obtenons

$$\text{(A2)} \qquad \frac{\eta^{1/2}}{\rho} (1 + \frac{3+a}{2a} \rho)^{3.\frac{a+1}{a+3}} = \text{constante} = \alpha,$$

et ξ est alors donné par $\xi = (\frac{\nu}{aC})^{4/3} \rho^{4/3} \eta^{1/3}$.

L'arc sous-intégral $(\mathcal{C}_\gamma)$ est choisi de telle façon que la pente de la tangente à l'origine soit égale à γ. Mais de l'équation (A2), nous déduisons que, pour ρ voisin de 0,

$$\eta \sim \alpha^2 \rho^2 \quad , \quad \xi \sim (\frac{\nu}{aC})^{4/3} \alpha^{2/3} \rho^2 .$$

Donc, le paramètre α, intervenant dans l'équation (A2), est donné par

$$\gamma = \lim_{\rho \to 0} \frac{\eta(\rho)}{\xi(\rho)} = \alpha^{4/3} (\frac{aC}{\nu})^{4/3} .$$

Reportant cette valeur de α dans (A2), nous obtenons les équations (1.15) et (1.16) de l'arc $(\mathcal{C}_\gamma)$, dans le cas de la dimension N=3.

Notes

(^{1}) Pour alléger l'exposé, nous noterons souvent u pour u(t).

(^{2}) $\mathcal{C}_b([0,+\infty); H_{faible})$ désigne l'espace des fonctions bornées et faiblement continues de $[0,+\infty)$ dans H.

Bibliographie

[1] C. Foias, J.C. Saut, Limite du rapport de l'enstrophie sur l'énergie pour une solution faible des équations de Navier-Stokes, C.R.A.S. 293, Série I, (1981) 241-244.

[2] C. Foias, J.C. Saut, Asymptotic behavior, as $t \to +\infty$, of solutions of Navier-Stokes equations and nonlinear spectral manifolds, à paraître dans Indiana J. Math.

[3] C. Foias, R. Temam, Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations, J. Math. Pures et Appl., 58 (1979), 339-368.

[4] C. Guillopé, Remarques à propos du comportement, lorsque $t \to +\infty$, des solutions des équations de Navier-Stokes associées à une force nulle, à paraître dans Bull. Soc. Math. France.

[5] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1934) 193-248.

[6] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod-Gauthier-Villars, Paris (1969) .

[7] R. Temam, Navier-Stokes equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland Amsterdam (1979).

[8] R. Temam, Navier-Stokes equations and Nonlinear Analysis, Proceedings of the NSF/CBMS Regional Conference, Dekalb,1981, SIAM 1983.

N° d'impression 617
3 ème trimestre 1983

GUILLOPÉ COLETTE

SUJET :

Quelques résultats sur le comportement à t fini et pour t tendant vers $+\infty$ des solutions des équations de Navier-Stokes.

RÉSUMÉ :

Dans cette Thèse, nous présentons quelques propriétés des solutions des équations de Navier-Stokes non stationnaires dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^N$, $N = 2$ ou 3. Nous considérons le cas du problème homogène dans un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$ et le cas du problème périodique en espace dans $\mathbf{R}^N$. Deux types de questions sont abordés :

. Propriétés des solutions lorsque $t \to +\infty$. En particulier, nous montrons que, si les données sont régulières et indépendantes du temps, tout espace fonctionnel invariant borné dans l'espace $H^1_{loc}(\Omega)^N$ est constitué de fonctions de classe C^∞. Dans le cas où les forces appliquées sont nulles, nous précisons le comportement de la solution dans chaque espace $H^m_{loc}(\Omega)^N$.

. Propriétés des solutions sur un intervalle de temps (t_o, t_1). Les résultats obtenus permettent en particulier de définir la représentation lagrangienne du flot associé à une solution faible des équations de Navier-Stokes sur un domaine Ω borné de $\mathbf{R}^N$.

MOTS CLES : Navier-Stokes, Analyse asymptotique.